Soluzioni degli esercizi di formulazione di PL$\{0, 1\}$

Salvatore Nocella*

12 febbraio 2007

1 Al lavoro

Due operai devono eseguire un certo numero di lavori $J = \{1, \ldots, n\}$, ciascuno della durata di un'ora. Per poter essere eseguito, ciascun lavoro richiede la disponibilità di un insieme di attrezzi $T_i = \{1, \ldots, m_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Poiché gli attrezzi sono presenti ciascuno in una sola copia e sono condivisi dai due operai, costoro devono mettersi d'accordo sull'ordine in cui eseguire i lavori in modo che i lavori che richiedono un medesimo utensile siano (per quanto possibile) eseguiti in tempi diversi. Formulare in termini di ottimizzazione combinatoria il problema di completare i lavori nel minimo tempo possibile servendosi di un opportuno grafo G.

Soluzione

Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico i cui vertici siano in corrispondenza biunivoca con i lavori e in cui una coppia di vertici ij sono adiacenti se e solo se richiedono un certo numero di attrezzi comuni per poter essere eseguiti (ovvero $T_i \cap T_j \neq \emptyset$).

Una colorazione su G individuerebbe una partizione dell'insieme di vertici in sottoinsiemi di lavori "compatibili", ovvero che è possibile eseguire in parallelo. Una semplice colorazione non è tuttavia una soluzione ammissibile in quanto un sottoinsieme compatibile potrebbe contenere un numero di lavori superiore al numero di operai disponibili. In tal caso non sarebbe comunque possibile eseguire tali lavori in parallelo. Viceversa, bisogna assicurare che il numero di lavori in ciascun insieme stabile non superi il numero

*Esercizi tratti dalle esercitazioni dei Proff. Alessandro Agnetis `http://www.dii.unisi.it/~agnetis/dispense.html` e Gianfranco Ciaschetti `http://www.ingfm.univpm.it/docenti/r_operativa/`

degli operai. Si vuole quindi trovare il minimo numero di colori che definiscano una colorazione su G in cui ciascun colore sia utilizzato, al più, 2 (il numero di operai) volte.

Si consideri pertanto l'insieme delle ore di lavorazione $\mathcal{H} = \{1, \ldots, n\}$, e si definiscano le seguenti variabili binarie:

- $x_{ih} = 1$ sse il lavoro i viene eseguito nell'ora h $\forall i \in J, \forall h \in \mathcal{H}$
- $y_h = 1$ sse almeno uno dei due operai lavorano nell'ora h ($\forall h \in \mathcal{H}$).

I vincoli che descrivono un assegnamento corretto dei lavori agli operai sono i seguenti:

- ciascun lavoro deve essere eseguito:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} x_{ih} = 1 \quad \forall i \in J$$

- lavori che hanno attrezzi in comune non possono essere lavorati contemporaneamente:

$$x_{ih} + x_{jh} \leq 1 \quad \forall ij \in E,\ \forall h \in \mathcal{H}$$

- durante un'ora di lavoro h, possono essere eseguiti al più due lavori:

$$x_{ih} + x_{jh} \leq 2 \quad \forall ij \notin E,\ i \neq j,\ \forall h \in \mathcal{H}$$

- l'ora h viene utilizzata per eseguire almeno un lavoro:

$$y_h \geq x_{ih} \quad \forall i \in J,\ \forall h \in \mathcal{H}$$

2 W gli sposi

L'agenzia matrimoniale *Cometimuovitaccoppio* vuole massimizzare il proprio guadagno, cercando di accoppiare tra loro il massimo numero di iscritti. A questo scopo, sia M l'insieme degli iscritti di sesso maschile, F l'insieme degli iscritti di sesso femminile, e sia $w_{i,j}$ il grado di compatibilità per ogni coppia $(i, j) \in M \times F$. Sapendo che a un grado di compatibilità (eventualmente anche negativo) pari a $w_{i,j}$ corrisponde un guadagno proporzionale $Kw_{i,j}$, e che sono possibili solo accoppiamenti di persone nella stessa regione, formulare il problema di massimizzare il guadagno dell'azienda con un modello di PL$\{0, 1\}$.

Soluzione

Si consideri il grafo bipartito $G = (M, F, E)$ in cui ciascun arco $(i, j) \in E$ per $i \in M$ e $j \in F$ collega un uomo ed una donna della stessa regione. Inoltre sia $w_i j \in \mathbb{R}$ il grado di compatibilità tra l'uomo i e la donna j. Il problema si può facilmente ricondurre ad un matching su G. Definiamo pertanto la seguente classe di variabili di decisione:

$$\forall ij \in E, \quad x_{ij} = 1 \text{ sse l'uomo } i \text{ viene accoppiato con la donna } j$$

I vincoli che descrivono l'insieme degli accoppiamente ammissibili che può fare l'agenzia sono i seguenti:

- ciascun uomo $i \in M$ può essere accoppiato con, al più, una donna:

$$\sum_{j \in \delta(i)} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in M$$

- ciascuna donna $j \in F$ può essere accoppiata con, al più, un uomo:

$$\sum_{i \in \delta(j)} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in F$$

Infine, l'obiettivo è quello di massimizzare il grado di compatibilità tra le coppie formate, ovvero:

$$\max \sum_{ij \in E} w_{ij} x_{ij}$$

3 Produzione industriale

In un sistema di produzione, n lavori devono essere eseguiti da m macchine in parallelo. Ogni macchina può effetture un lavoro alla volta e ogni lavoro deve essere eseguito da una sola macchina senza interruzione. Siano c_{ij} e p_{ij} rispettivamente il costo ed il tempo (in ore) necessari ad eseguire il lavoro j sulla macchina i. Inoltre, se ad una macchina è assegnato almeno un lavoro, per la sua messa in funzione deve essere considerato un costo aggiuntivo di attivazione pari a f_i, $i = 1, \ldots, m$. Sapendo che ogni macchina può operare per non più di C ore, formulare il problema di assegnare i lavori alle macchine, con l'obiettivo di minimizzare i costi totali di produzione.

Soluzione

Si deve decidere, innanzitutto, l'assegnazione dei lavori alle macchine (e l'attivazione di queste ultime):

- $x_{kj} = 1$ sse il lavoro j viene eseguito dalla macchina k ($j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$).
- $y_k = 1$ sse la macchina k viene attivata ($k = 1, \ldots, m$).

Infine, deve essere decisa la sequenza con cui vengono eseguiti i lavori assegnati a ciascuna macchina e il relativo istante di inizio:

- $\alpha_{ij}^k = 1$ sse il lavoro i viene effettuato prima del lavoro j sulla macchina m ($i, j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$).
- $t_j \in \mathbb{R}_+$ è l'istante di inizio del lavoro j ($j = 1, \ldots, n$).

Si vuole assegnare lavori a macchine con l'obiettivo di minimizzare i costi di processamento e di attivazione delle macchine:

$$\min \sum_{k=1}^{m} f_k y_k + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{kj} x_{kj}$$

Un assegnamento ammissibile di lavori a macchine è assicurato dal seguente insieme di vincoli lineari:

- ciascun lavoro deve essere assegnato ad, esattamente, una macchina:

$$\sum_{k=1}^{m} x_{kj} = 1 \quad j = 1, \ldots, m$$

- attivazione delle macchine:

$$y_k \geq x_{kj} \quad \forall k, j$$

La sequenzializzazione ammissibile dei lavori sulle macchine è descritta tramite i vincoli seguenti:

- il lavoro j segue il lavoro i sulla macchina k solo se sia j che i sono assegnati alla macchina k:

$$\alpha_{ij}^k \geq x_{kj} \quad i, j = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, m$$

$$\alpha_{ij}^k \geq x_{ki} \quad i, j = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, m$$

- su una generica macchina k, può accedare:
  - il lavoro i viene eseguito prima del lavoro j
  - il lavoro j viene eseguito prima del lavoro i
  - nessuno dei precedenti.

  Per assicurarci che due lavori non siano eseguiti sulla stessa macchina in intervalli di tempo sovrapposti, si scelga una costante $M \gg \sum_{ij} p_{ij}$. Si introducano quindi i seguenti vincoli:

$$\left(1 - \alpha_{ij}^k\right) M + t_j \geq t_i + p_{ik} \quad i, j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m$$

$$\left(1 - \alpha_{ji}^k\right) M + t_i \geq t_j + p_{jk} \quad i, j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m$$

4 Reti di calcolatori

In una rete di calcolatori, vi sono n terminali ciascuno dei quali deve essere collegato ad un concentratore. Ci sono m concentratori, a ognuno dei quali possono essere collegati al più k terminali. Perché un concentratore possa essere collegato a un terminale, quest'ultimo deve essere "attivo". Il costo di attivazione di un concentratore j è f_j , mentre il costo di collegamento del terminale i con il concentratore j è c_{ij}. Formulare come PL$\{0, 1\}$ il problema di minimizzare i costi complessivi, nel rispetto dei vincoli.

Soluzione

Definiamo le seguenti classi di variabili binarie:

- $x_{ij} = 1$ sse il terminale i è collegato al concentratore j ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$).
- $y_j = 1$ sse il terminale j è attivato ($j = 1, \ldots, m$).

L'obiettivo è quello di minimizzare i costi dovuti all'attivazione dei concentratori e a ciascun collegamento terminale-concentratore. Si noti come il costo f_j (usualmente riferito come costo di start-up) è sempre lo stesso indipendentemente dal numero $h > 1$ di terminali collegati al concentratore j.

$$\min \sum_{j=1}^{m} f_j y_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

I vincoli definiscono un assegnamento ammissibile di terminali a concentratori sono i seguenti:

- Ciascun terminale deve essere collegato ad esattamente un concentratore:
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n$$
- Al più k terminali possono essere contemporaneamente collegati a ciascun concentratore:
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq k \quad j = 1, \ldots, m$$
- se il terminale i viene collegato al concentratore j, allora quest'ultimo deve essere attivato:
$$y_j \geq x_{ij} \quad \forall i, j$$