Claudio Arbib
Università di L'Aquila

Ricerca Operativa

Il metodo del simplesso

Sommario

- Notazione
- Basi e soluzioni di base
- Forma canonica
- Teorema 1: criterio di ottimalità
- Teorema 2: criterio di illimitatezza
- Operazione di pivot
- Teorema 3: miglioramento della base corrente
- Schema generale

Notazione

Consideriamo il problema di PL in forma standard

$$
P: \quad \max \quad \mathbf{cx}
$$
$$
\mathbf{Ax} = \mathbf{b}
$$
$$
\mathbf{x} \geq \mathbf{0}
$$

con $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^m$, $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m \times n}$.

Senza perdere in generalità, supponiamo $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = m$.

Per ogni $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ siano:

- $\mathbf{c}_S$ ($\mathbf{x}_S$) il sottovettore di $\mathbf{c}$ (di $\mathbf{x}$) con componenti in S;
- $\mathbf{A}_S$ la sottomatrice di $\mathbf{A}$ formata dalle colonne a indici in S.

Esempio: $S = \{1, 2, 4\}$

- $\mathbf{c} = (1, -3, 0, 2)$, $\quad \mathbf{c}_S = (1, -3, 2)$;
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Basi e soluzioni di base

Definizione: Un insieme $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ è una base per il problema (P) se $\mathbf{A}_B$ è non singolare.
L'insieme $N = \{1, \ldots, n\} - B$ si dice insieme degli indici non di base.
Il problema (P) si può riscrivere

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{A}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Invertendo $\mathbf{A}_B$ e premoltiplicando si ottiene

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Definizione: La soluzione

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_N &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

si dice soluzione di base associata a B. Se in particolare si ha $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, allora si dirà soluzione di base ammissibile per (P).

Basi e soluzioni di base

Esempio: Nel problema

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 & & \\
 & x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 8 \\
 & 2x_1 + 5x_3 + x_4 & = & 4 \\
 & x_1,\ldots, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

l'insieme $B = \{1, 2\}$ costituisce una base in quanto la matrice

$$\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$ è non singolare. Invertendola si ha:

$$\mathbf{A}_B^{-1} = -\tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Si ha quindi la soluzione di base ammissibile $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Considerazione: L'idea di fondo consiste nel separare la verifica dei vincoli di eguaglianza da quella (più facile) delle clausole di non negatività.

Un problema equivalente

Sostituendo $\mathbf{x}_B = (\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N)$ nella funzione obiettivo di (P) e interpretando le $\mathbf{x}_B$ (che sono $\geq \mathbf{0}$) come slack si ha poi il problema in forma generale

$$
\begin{array}{lll}
\text{P'}: & \max & (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\
 & & \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N \leq \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\
 & & -\mathbf{x}_N \leq \mathbf{0}
\end{array}
$$

Questo problema (P’) è equivalente a (P) nel senso che a ogni soluzione di (P) corrisponde una soluzione di (P’) che ha lo stesso valore, e viceversa.

In particolare:

– una soluzione ottima di (P’) corrisponde a una soluzione ottima di (P).

– (P) è illimitato superiormente se e solo se anche (P’) lo è.

Esempio

Riprendiamo il problema

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\
& x_1 + 2x_2 - 3x_3 \qquad = 8 \\
& 2x_1 \qquad + 5x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1,\ldots, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

in cui, come già visto, l'insieme $B = \{1, 2\}$ costituisce una base:

$$
\mathbf{A}_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & ½ \\ ½ & -¼ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} 5/2 & ½ \\ -11/4 & -¼ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Si ricava $(\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N) = -(17 \quad 1)$. Moltiplicando poi la prima disequazione per 2 e la seconda per 4, il problema si riscrive

$$
\begin{array}{ll}
\max & -17x_3 - x_4 + (5 \quad -2)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -17x_3 - x_4 + 4 \\
& 5x_3 + x_4 \leq 4 \\
& -11x_3 - x_4 \leq 12 \\
& x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

e ammette la soluzione $x_3 = x_4 = 0$ di valore 4.

Forma canonica

Il problema

$$P': \quad \max \quad (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N \leq \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$
$$-\mathbf{x}_N \leq \mathbf{0}$$

può riscriversi

$$\max \quad \mathbf{c}_N'\mathbf{x}_N + d'$$
$$\mathbf{A}_N'\mathbf{x}_N \leq \mathbf{b}'$$
$$\mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

con

$$\mathbf{c}_N' = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$$
$$\mathbf{b}' = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b},$$
$$\mathbf{A}_N' = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N \qquad d' = \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$

e si dirà in forma canonica se $\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$.

Il vettore $\mathbf{c}_N' = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$ si dice vettore dei costi ridotti.

Lo scalare $d' = \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$ è pari al costo della soluzione associata alla base B.

Riassumendo

Supponendo di disporre di una base ammissibile B, possiamo raccogliere i dati del problema (P) o del suo equivalente (P’) in una tabella canonica

costi ridotti fuori base

costi ridotti in base

valore della f.o. nella soluzione di base (cambiato di segno)

$\mathbf{c}_N' = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$	$\mathbf{0}$	$-d' = -\mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{A}_N' = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$	$\mathbf{I}_{m \times m}$	$\mathbf{b}' = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

N: Variabili (colonne) fuori base

B: Variabili (colonne) in base

Esempio

Riprendendo il problema

$$\begin{array}{lrcl} \max & -17x_3 - x_4 + 4 & & \\ & 5x_3 + x_4 & \leq & 4 \\ & -11x_3 - x_4 & \leq & 12 \\ & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

costi ridotti fuori base

costi ridotti in base

valore della f.o. nella soluzione di base (cambiato di segno)

– 17	– 1	0	0	–4
5	1	1	0	4
– 11	– 1	0	1	12

$\underbrace{\qquad\qquad}_{x_3,\, x_4}$ $\underbrace{\qquad}_{x_1,\, x_2}$

Teorema 1

Criterio di ottimalità: Sia $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ una soluzione di base ammissibile per (P).

Se $\mathbf{c}_N' = (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N) \leq \mathbf{0}$, allora $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)$ è ottima.

Dimostrazione: Per il Teorema di Dualità Forte $\mathbf{x}$ è ottima se e solo se esiste una $\mathbf{y}$ soluzione di

$$\text{D)} \quad \min \quad \mathbf{yb}$$
$$\mathbf{yA} \geq \mathbf{c}$$

tale che $\mathbf{yb} = \mathbf{cx}$.

Sia $\mathbf{y} = \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1} \in \mathrm{IR}^m$. Si ha

$$\mathbf{yA}_B = \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_B = \mathbf{c}_B \geq \mathbf{c}_B \text{ (ovviamente).}$$
$$\mathbf{yA}_N = \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N \geq \mathbf{c}_N \text{ (per ipotesi).}$$

Quindi $\mathbf{y}$ è ammissibile per (D)

Inoltre $\mathbf{cx} = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{c}_N\cdot\mathbf{0} = \mathbf{yb}$.

Quindi $\mathbf{x}$ è ottima per (P).

Esempio

Riprendendo il problema

$$\begin{array}{lrcr} \max & -17x_3 - x_4 + 4 & & \\ & 5x_3 + x_4 & \le & 4 \\ & -11x_3 - x_4 & \le & 12 \\ & x_3, x_4 & \ge & 0 \end{array}$$

La soluzione $x_3 = x_4 = 0$

$x_1 = 4$

$x_2 = 12$

è ottima sia per P' che per P

valore della f.o. nella soluzione di base (cambiato di segno)

– 17	– 1	0	0	–4
5	1	1	0	4
– 11	– 1	0	1	12

$\underbrace{\qquad\qquad}_{x_3,\ x_4}$ $\underbrace{\qquad}_{x_1,\ x_2}$

Teorema 2

Criterio di illimitatezza: Sia $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ una soluzione di base ammissibile per (P).

Se $\exists k \in N$: $c_k' > 0$ e $\mathbf{A}_k' \leq \mathbf{0}$, allora (P) è illimitato superiormente.

Dimostrazione: Anzitutto (P) è illimitato superiormente sse lo è (P').

Ma per il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare, (P') è illimitato superiormente se esiste $\mathbf{d} \in \mathrm{rec}(P')$ tale che $\mathbf{cd} > 0$.

Ora si ha

$$\mathrm{rec}(P') = \{\mathbf{u} \in \mathrm{IR}^n\colon \mathbf{A}'\mathbf{u} \leq \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$$

Evidentemente, $\mathbf{d} = \mathbf{e}_k \in \mathrm{rec}(P')$. Infatti

$$\begin{array}{llll} \mathbf{A}'\mathbf{e}_k = \mathbf{A}_k' & \leq \mathbf{0} & & \text{(per ipotesi)} \\ \mathbf{c}'\mathbf{e}_k = c_k' & > 0 & & \text{(per ipotesi).} \end{array}$$

Quindi (P') è illimitato superiormente.

Modifiche alla tabella canonica

La tabella canonica **T** può essere modificata con operazioni di combinazione lineare delle righe ottenendo una tabella che rappresenti un problema equivalente a (P).

T' =

$\mathbf{c}_N' + \mathbf{w}\mathbf{A}_N'$	$\mathbf{0} + \mathbf{w}$	$-d' + \mathbf{w}\mathbf{b}'$
$\mathbf{A}_N'$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$

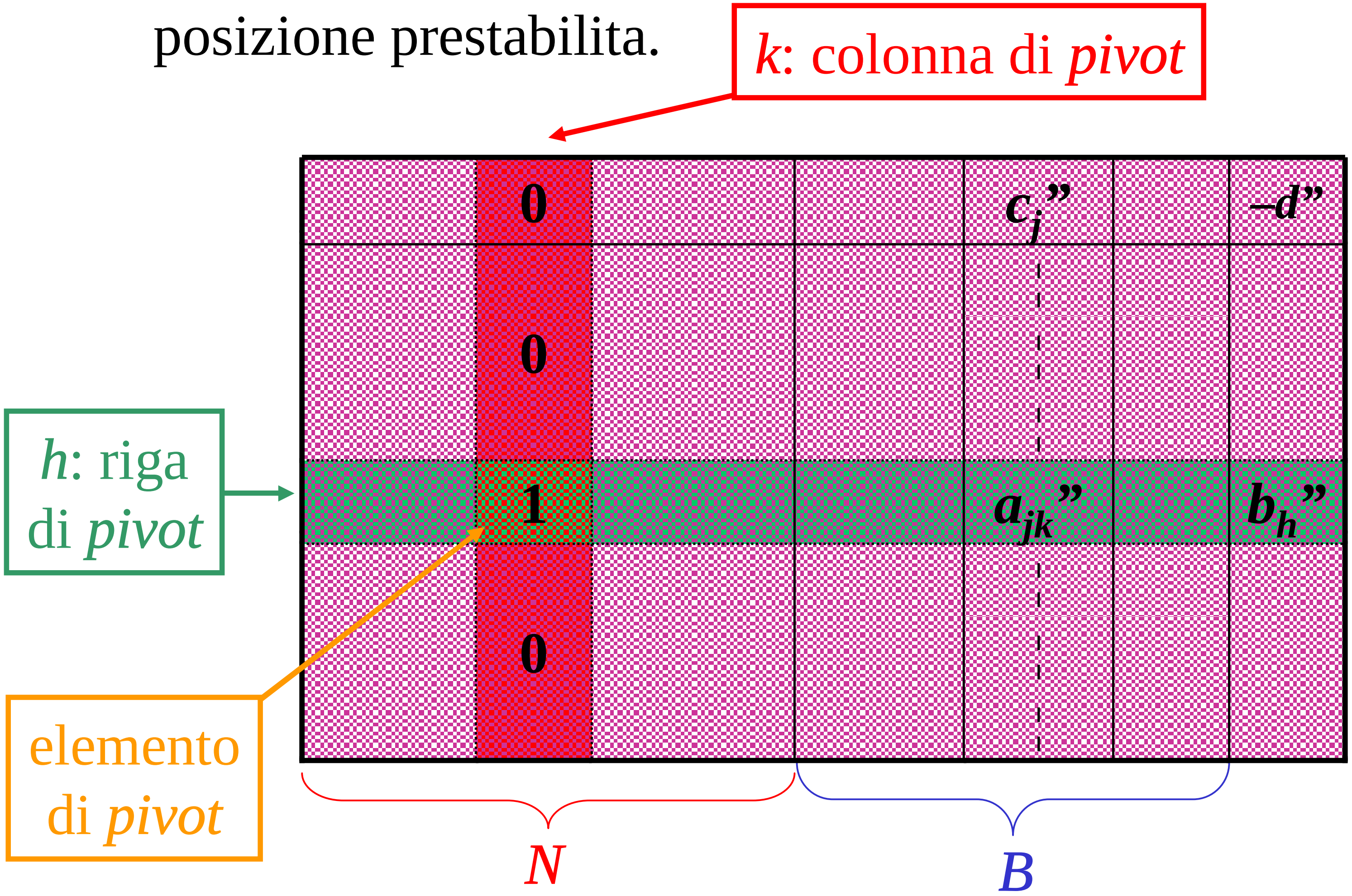
Sia $\mathbf{w} \in R^m$. Allora si può sommare la riga $\mathbf{w}(\mathbf{A}_N', \mathbf{I}, \mathbf{b}')$

- a qualsiasi equazione di **T** (righe da 1 a m)
- alla riga $(\mathbf{c}_N', \mathbf{0}, -d')$ (riga 0).

Infatti $\mathbf{c}_N' \mathbf{0} + \mathbf{0}\mathbf{x}_B + d' + \mathbf{w}(\mathbf{0}) = d'$, $\forall (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)$ di base

Operazione di *pivot*

L'operazione di *pivot* consiste nel combinare linearmente le righe di **T** in modo da ottenere una colonna unitaria in posizione prestabilita.



Operazione di *pivot*

Per eseguire un'operazione di *pivot* basta:

1. scegliere un elemento di pivot $a_{hk}' \neq 0$
2. dividere la riga h per a_{hk}', ottenendo $a_{hk}'' = 1$
3. sottrarre alla generica riga i la riga h così ricavata moltiplicata per a_{ik}', ottenendo $a_{ik}'' = 0$

   $b_i'' = b_i' - b_h' a_{ik}' / a_{hk}'$
4. sottrarre alla riga 0 la riga h così ricavata moltiplicata per c_k', ottenendo $c_k'' = 0$

   $-d'' = -d' - b_h' c_k' / a_{hk}'$

Esempio

1. Scegliere un elemento di *pivot* a_{hk}'

1	–3	6	0	0	0	2
3	2	–1	0	0	1	2
1	0	**4**	1	0	0	3
0	5	–2	0	1	0	1

a_{23}'

Esempio

2. Dividere la riga 2 per a_{23}'

1	–3	6	0	0	0	2
3	2	–1	0	0	1	2
1	0	4	1	0	0	3
0	5	–2	0	1	0	1

a_{23}'

Esempio

2. Dividere la riga 2 per a_{23}'

1	–3	6	0	0	0	2
3	2	–1	0	0	1	2
¼	0	1	¼	0	0	¾
0	5	–2	0	1	0	1

Esempio

3. Sottrarre alla riga 1 la riga 2 moltiplicata per a_{13}'

	1	–3	6	0	0	0	2
	13/4	2	0	¼	0	1	11/4
+1	¼	0	1	¼	0	0	¾
	0	5	–2	0	1	0	1

Esempio

3. Sottrarre alla riga 3 la riga 2 moltiplicata per a_{33}'

	1	–3	6	0	0	0	2
	13/4	2	0	¼	0	1	11/4
+2	¼	0	1	¼	0	0	¾
	½	5	0	½	1	0	5/2

Esempio

4. Sottrarre alla riga 0 la riga 2 moltiplicata per c_3'

	– ½	–3	0	–3/2	0	0	-5/2
	13/4	2	0	¼	0	1	11/4
–6	¼	0	1	¼	0	0	¾
	½	5	0	½	1	0	5/2

Colonna entrata in base

Colonna uscita dalla base

Teorema 3

Miglioramento base corrente: Sia $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ una soluzione di base ammissibile per (P).
Se $\exists\, h \in R$, $k \in N$: $c_k' > 0$ e $a_{hk}' > 0$,
allora (P) ammette una base B' associata a una soluzione non peggiore di quella associata a B.

Dimostrazione: Senza perdere di generalità, sia h tale che

$$b_h / a_{hk} \;\leq\; b_i / a_{ik} \qquad\qquad \forall i \in R: a_{ik} > 0$$

Eseguendo un'operazione di *pivot* su a_{hk} si ottiene una nuova base ammissibile B'.

Inoltre il valore della soluzione associata a B' è

$$d'' = d' + \underbrace{b_h}_{\boxed{\geq 0}}\, \underbrace{c_k}_{\boxed{> 0}} / \underbrace{a_{hk}}_{\boxed{> 0}} \;\geq\; d'$$

Esempio

1	–3	6	0	0	0	2
3	2	–1	0	0	1	2
1	0	4	1	0	0	3
0	5	–2	0	1	0	1

Riga di pivot

Colonna di pivot

Esempio

Nuovo valore funzione obiettivo

– ½	–3	0	–3/2	0	0	**–5/2**
13/4	2	0	¼	0	1	11/4
¼	0	1	¼	0	0	¾
½	5	0	½	1	0	5/2

Colonna entrata in base

Colonna uscita dalla base

Metodo del Simplesso

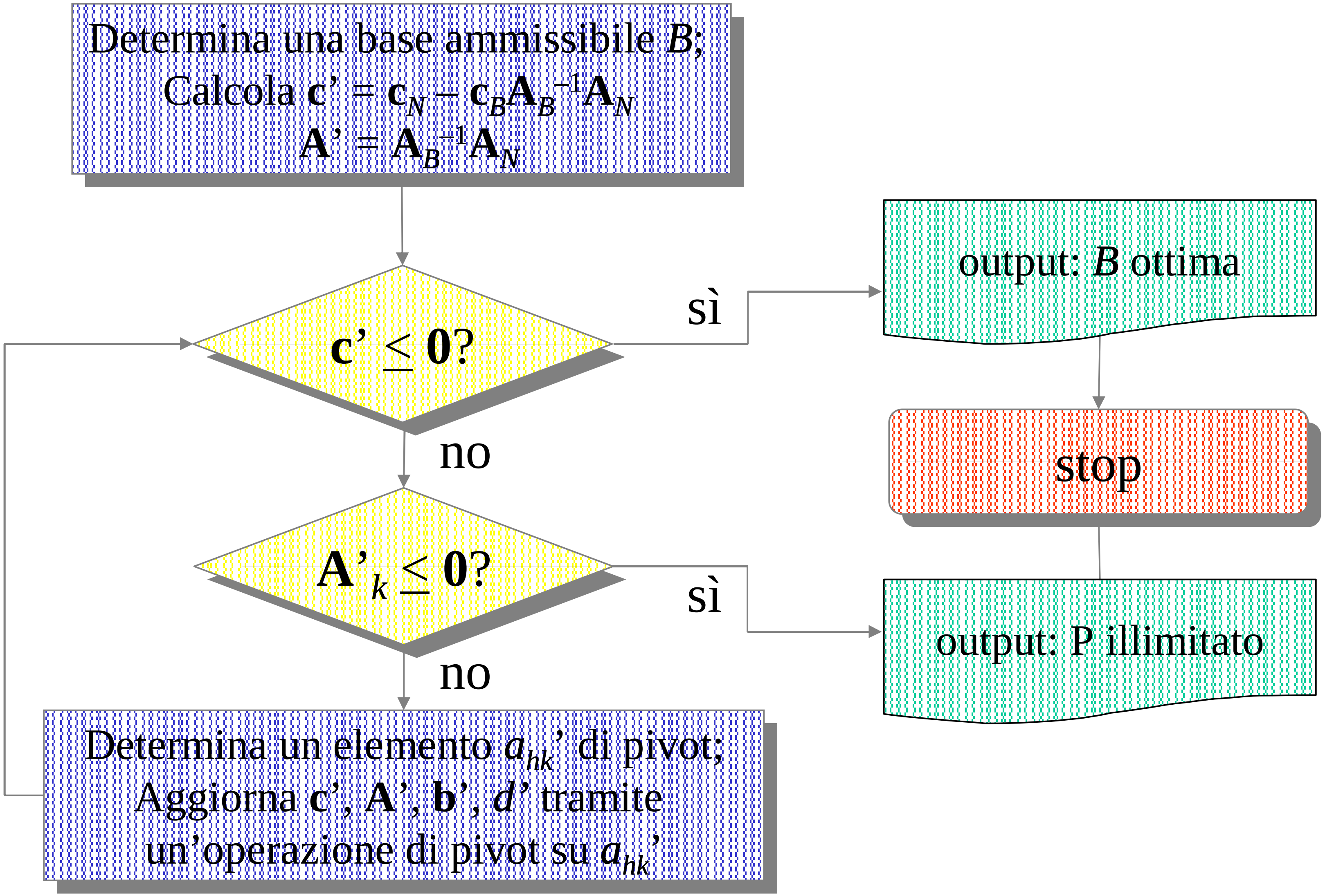
FASE I

- Individuare una base ammissibile B (base corrente) e costruire la tabella canonica **T**

FASE II

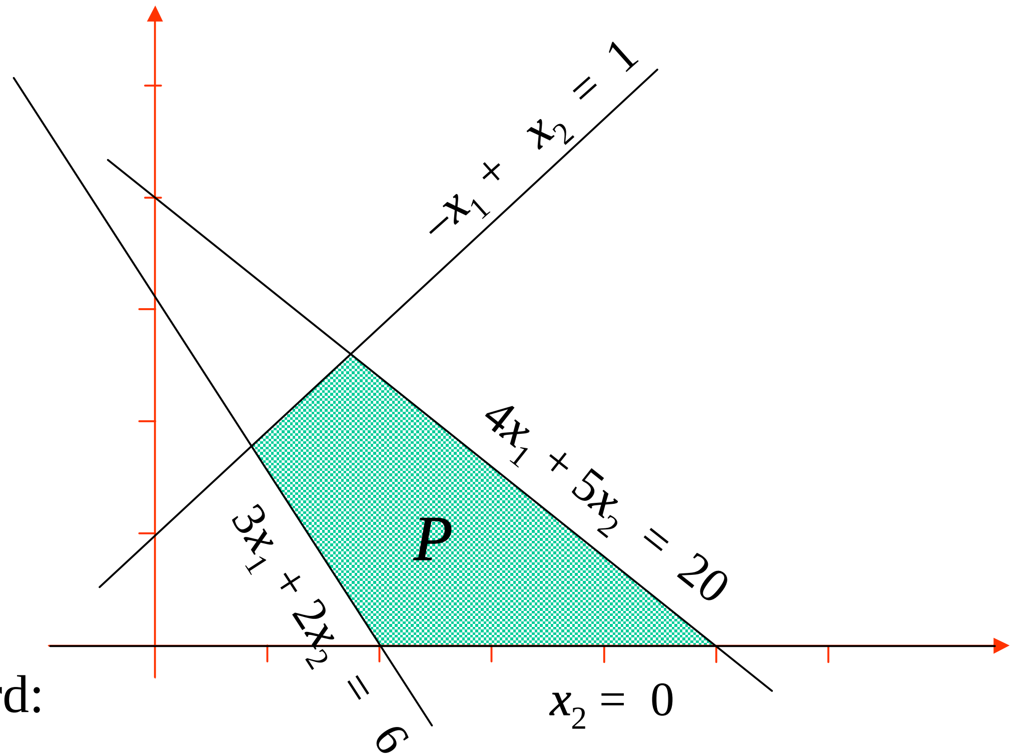
1. Se $\mathbf{c}' \leq \mathbf{0}$, la base corrente è ottima (Teorema 1)
2. Se $c_k' > 0$ e $\mathbf{A}_k' \leq \mathbf{0}$, (P) è illimitato (Teorema 2)
3. Se $c_k' > 0$ e $a_{hk}' > 0$ con $b_h'/a_{hk}' \leq b_i'/a_{ik}'$ per ogni riga i tale che $a_{ik}' > 0$, allora eseguire un'operazione di pivot su a_{hk}' e aggiornare la base corrente (Teorema 3)

Diagramma di flusso



Esempio

$$
\begin{array}{lll}
P: & \max & 3x_1 + 2x_2 \\
& & 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\
& & 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\
& & -x_1 + x_2 \le 1 \\
& & x_2 \ge 0
\end{array}
$$



Problema equivalente in forma standard:

$$
\begin{array}{lll}
S: & \max & 3u_1 - 3w_1 + 2x_2 \\
& & 4u_1 - 4w_1 + 5x_2 + z_1 = 20 \\
& & -3u_1 + 3w_1 - 2x_2 + z_2 = -6 \\
& & -u_1 + w_1 + x_2 + z_3 = 1 \\
& & u_1, w_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \ge 0
\end{array}
$$

Applicazione del simplesso

u_1	w_1	x_2	z_1	z_2	z_3	
3	–3	2	0	0	0	0
4	–4	5	1	0	0	20
3	–3	2	0	**–1**	0	6
–1	1	1	0	0	1	1

La tabella non è canonica

Si può renderla canonica eseguendo un'operazione di pivot su quest'elemento

La tabella risultante è

u_1	w_1	x_2	z_1	z_2	z_3	
0	0	0	0	1	0	–6
0	0	7/3	1	4/3	0	12
1	–1	2/3	0	–1/3	0	2
0	0	5/3	0	–1/3	1	3

(in verde le colonne in base)

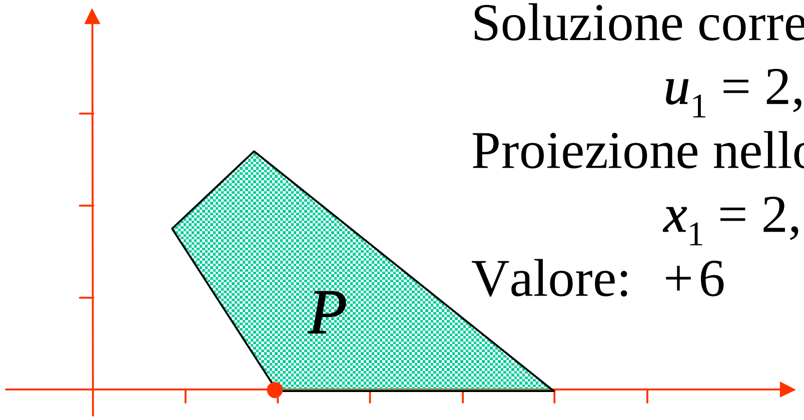
1^a iterazione

costo ridotto positivo

u_1	w_1	x_2	z_1	z_2	z_3	
0	0	0	0	1	0	–6
0	0	7/3	1	4/3	0	12
1	–1	2/3	0	–1/3	0	2
0	0	5/3	0	–1/3	1	3

Elemento di pivot

Colonna di pivot



Soluzione corrente:

$u_1 = 2, z_1 = 12, z_3 = 3$

Proiezione nello spazio (x_1, x_2):

$x_1 = 2, x_2 = 0$

Valore: +6

Pivot

u_1	w_1	x_2	z_1	z_2	z_3	
0	0	0	0	1	0	–6
0	0	7/3	1	4/3	0	12
1	–1	2/3	0	–1/3	0	2
0	0	5/3	0	–1/3	1	3

Tabella risultante

costi ridotti $\leq 0 \Rightarrow$ soluzione ottima

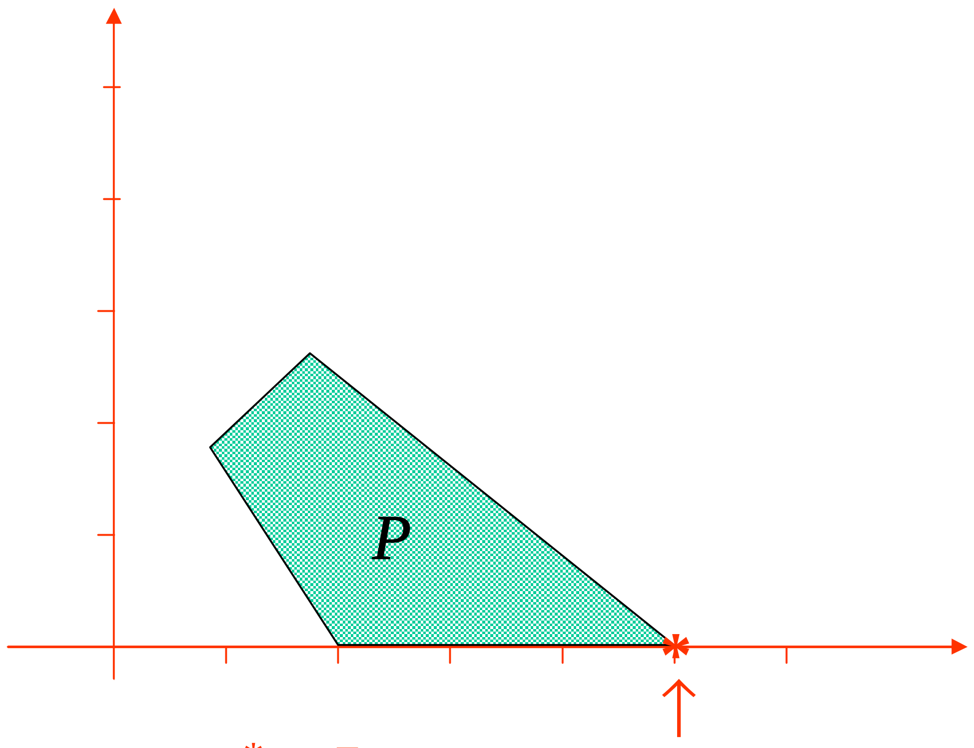
u_1	w_1	x_2	z_1	z_2	z_3	
0	0	–7/4	–3/4	0	0	–15
0	0	7/4	3/4	1	0	9
1	–1	5/4	1/4	0	0	5
0	0	9/4	1/4	0	1	6

nuova base

La soluzione ottima

P: max $3x_1 + 2x_2$

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 5x_2 &\leq 20\\
3x_1 + 2x_2 &\geq 6\\
-x_1 + x_2 &\leq 1\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



$u_1^* = 5$
$z_2^* = 9$
$z_3^* = 6$
$\Rightarrow$
$x_1^* = 5$
$x_2^* = 0$

fine dell'esempio