Claudio Arbib
Università di L'Aquila

Ricerca Operativa

Reti di flusso

Sommario

- Definizioni di base
  - Flusso di un campo vettoriale
  - Divergenza
  - Integrale di Gauss-Greene
- Flusso in una rete
- Sorgenti, pozzi e nodi di transito
- Circolazioni e potenziali
- Il problema del flusso ottimo
  - Problemi con funzione costo separabile
  - Problemi concavi e lineari
- Gerarchia dei problemi di flusso ottimo

Definizioni di base

Sia $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (x_1, \ldots, x_p)$ un *campo vettoriale* in $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{R}^p$

Siano S una *superficie* in R^p e $\mathbf{n}(\mathbf{u})$ il *versore normale* a S in $\mathbf{u}$.

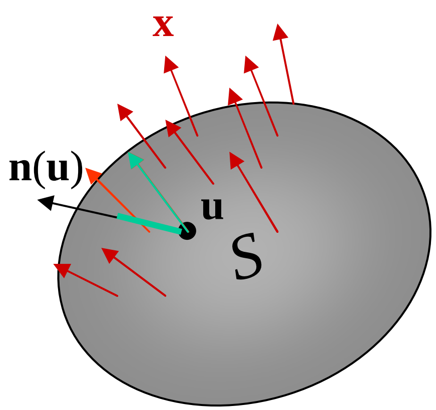
$$\mathrm{div}(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \ldots + \frac{\partial x_p}{\partial u_p}$$ divergenza di $\mathbf{x}$

$$\varphi(\mathbf{x}, S) = \int_S \mathbf{x}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) \mathrm{d}S$$ flusso di $\mathbf{x}$ attraverso S

Integrale di Gauss-Greene:

S chiusa
W volume racchiuso da S

$$\varphi(\mathbf{x}, S) = \int_W \mathrm{div}(\mathbf{x}) \mathrm{d}W$$

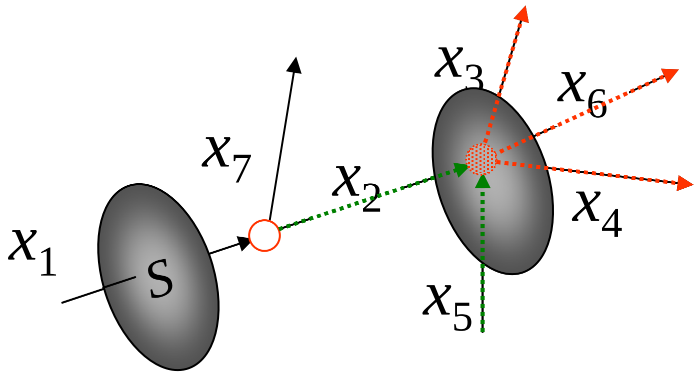


Flusso in una rete

In questo caso si assume che il campo vettoriale **x** sia diverso da 0 solo sugli archi di una rete, rappresentata come un grafo $G = (V, E)$ con n nodi e m archi.

Se la rete è conservativa, dato un qualsiasi arco uv, il flusso in uv si mantiene costante. Il campo **x** diviene un vettore con componenti associate agli archi di G:

$\mathbf{x} \in \mathrm{R}^m$ distribuzione di flusso



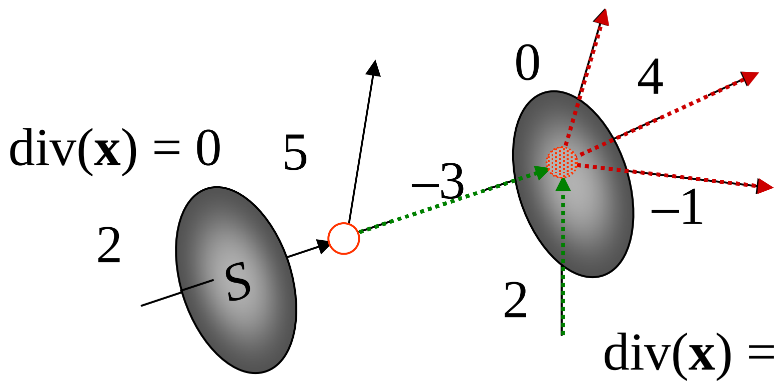
L'integrale di Gauss-Greene diventa una sommatoria e in ogni punto $\varphi(\mathbf{x}, S)$ eguaglia la *differenza* tra il flusso uscente da S e quello entrante in S.

Flusso in una rete

Se si riferisce l'integrale volumetrico della divergenza a un volume unitario contenente il punto *u*, si può scrivere

$\mathrm{div}_u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, S)$ divergenza di $\mathbf{x}$ nel punto u

Esempio:



$$\mathrm{div}(\mathbf{x}) = (\overbrace{4 - 1 + 0}^{\text{flusso uscente da } u}) - (\overbrace{-\,3 + 2}^{\text{flusso entrante in } u}) = 4$$

Poiché nei punti interni di ogni arco la divergenza del campo $\mathbf{x}$ è nulla, i suoi valori significativi sono solo quelli associati ai nodi di *G*.
Questi vengono raccolti in un vettore che rappresenta il bilancio del flusso ai nodi:

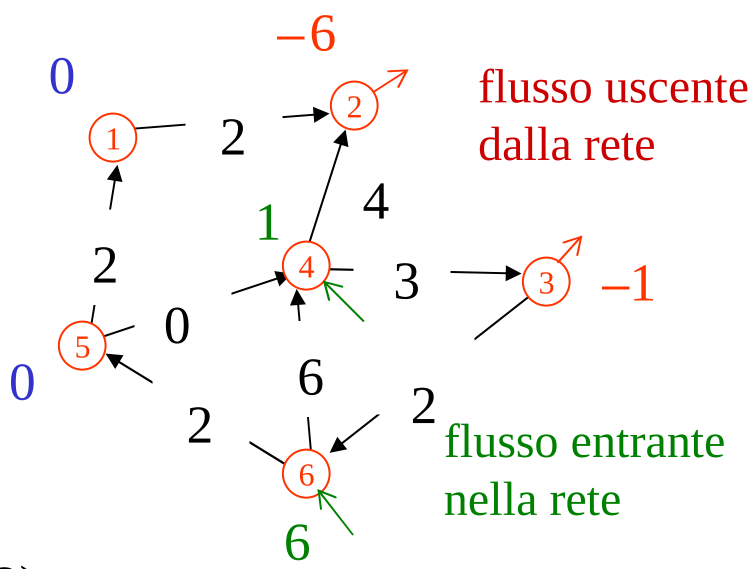
$\mathrm{div}(\mathbf{x}) \in R^n$ divergenza della distribuzione $\mathbf{x}$

Sorgenti, pozzi e nodi di transito

Si può esprimere la divergenza di **x** in forma compatta utilizzando la matrice di incidenza nodi-archi **G** del grafo *G*.

$$\mathrm{div}(\mathbf{x}) = -\mathbf{G}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c|cccccccc} & 12 & 36 & 42 & 43 & 51 & 54 & 64 & 65 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$



Nell'esempio, $\mathbf{x} = (2, 2, 4, 3, 2, 0, 6, 2)$

$\mathrm{div}_1(\mathbf{x}) = -(-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\cdot\mathbf{x} = -(-2 + 2) = 0$ transito

$\mathrm{div}_3(\mathbf{x}) = -(0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\cdot\mathbf{x} = -(-2 + 3) = -1$ pozzo

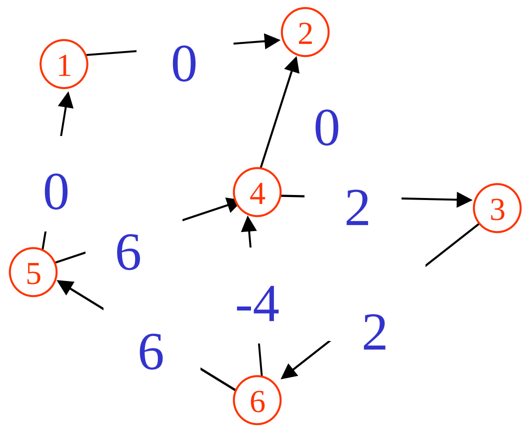
$\mathrm{div}_4(\mathbf{x}) = -(0, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0)\cdot\mathbf{x} = -(-4 - 3 + 0 + 6) = 1$ sorgente

Circolazioni

La somma delle componenti della divergenza è sempre nulla (rete conservativa $\Rightarrow$ flusso entrante = flusso uscente).

Si definisce circolazione una distribuzione di flusso **x** a divergenza identicamente nulla (solo nodi di transito).

$$
\mathbf{G} = \begin{array}{c|cccccccc|}
 & 12 & 36 & 42 & 43 & 51 & 54 & 64 & 65 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

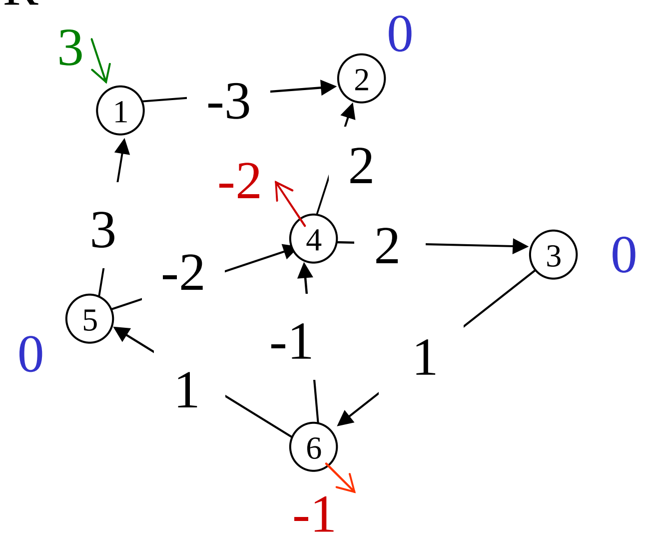


La distribuzione banale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è una circolazione, ma una circolazione non è necessariamente banale.

Potenziali

Si dice potenziale un qualsiasi vettore $\mathbf{y} \in R^n$

(Ad esempio, div($\mathbf{x}$) è un potenziale).



La differenza di potenziale è un vettore $\Delta\mathbf{y} \in R^m$.
La componente di $\Delta\mathbf{y}$ associata al generico arco $uv \in E$ è

$$\Delta\mathbf{y}_{uv} = y_v - y_u$$

Si ha evidentemente $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{E}_G$

Proprietà: per ogni distribuzione di flusso $\mathbf{x}$ e ogni potenziale $\mathbf{y}$ si ha

$$\mathbf{x}\cdot\Delta\mathbf{y} = \mathbf{yGx} = -\,\mathbf{y}\cdot\mathrm{div}(\mathbf{x})$$

Inoltre $\mathbf{x}$ e $\Delta\mathbf{y}$ sono ortogonali per ogni $\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{x}$ è una circolazione.

Il problema del flusso ottimo

Consiste nel determinare una coppia di vettori $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$, appartenenti a determinate regioni ammissibili Φ e Ω, che rappresentino una distribuzione e un potenziale in una rete e minimizzino una data funzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$
\begin{array}{ll}
\min & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 & \mathrm{div}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \\
 & \mathbf{x} \in \Phi \subseteq \mathrm{R}^m \\
 & \mathbf{y} \in \Omega \subseteq \mathrm{R}^n
\end{array}
$$

Funzione di costo separabile

La funzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ si dice separabile se può essere espressa come somma di funzioni dipendenti individualmente dal valore del flusso in ciascun arco o del potenziale in ciascun nodo:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{uv\in E} f_{uv}(x_{uv}) + \sum_{u\in V} f_u(y_u)$$

Esempio: la forma lineare $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{cx} + \mathbf{c'y}$ è evidentemente separabile.

Esempio: la forma quadratica $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$, con $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{m\times m}$, non è in genere separabile in quanto

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{h\in E} \sum_{k\in E} a_{hk}x_h x_k$$

contiene termini misti, cioè dipendenti da flussi in archi distinti.

Gerarchia dei problemi di flusso ottimo