RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 21 febbraio 2012

1. Siano $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -1, 2)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 0, -5)$. Utilizzando il metodo di Fourier-Motzkin, si dimostri che il vettore $\mathbf{b}_1 = (0, 3, 2)$ è combinazione conica di $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ e che il vettore $\mathbf{b}_2 = (7, -8, 1)$ non è combinazione conica di $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$.

Se $\mathbf{b}_1$ è combinazione conica di $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_4$, allora il sistema
$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 2x_3 - 5x_4 & = & 2 \\ x_1, \ldots, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$
è compatibile.

Se $\mathbf{b}_2$ non è combinazione conica di $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_4$, il sistema
$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 2x_3 - 5x_4 & = & 2 \\ x_1, \ldots, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$
è incompatibile.

Entrambi i casi possono essere agevolmente verificati tramite il metodo di Fourier-Motzkin. Per accelerare l'operazione si può impostare il sistema
$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = & y_1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = & y_2 \\ 2x_1 + 2x_3 - 5x_4 & = & y_3 \\ x_1, \ldots, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$
e procedere alla eliminazione delle sole x_i. La verifica viene poi fatta sostituendo $\mathbf{y} = \mathbf{b}_1$ e $\mathbf{y} = \mathbf{b}_2$ nel sistema risultante.

2. Si consideri il problema di programmazione lineare:
$$(P) \quad \min \ y_1 + 2y_2 + y_3$$
$$\begin{array}{rcll} y_1 - 2y_2 + y_3 & \geq & 2 & \\ -y_1 + y_2 + y_3 & \geq & 4 & \\ 2y_1 + y_3 & \geq & 6 & \\ y_1 + y_2 + y_3 & \geq & 2 & \\ y_i & \geq & 0 & i = 1, 2, 3 \end{array}$$

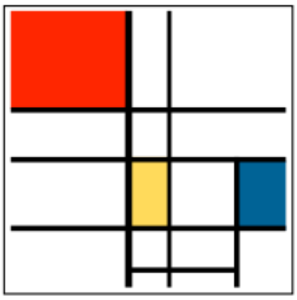
Scrivere il duale (D) di (P) e, utilizzando le condizioni di complementarità, mostrare che
$$(y_1, y_2, y_3) = (2/3,\ 0,\ 14/3) \text{ è una soluzione ottima di } (P)$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,\ 1/3,\ 2/3,\ 0) \text{ è una soluzione ottima di } (D).$$

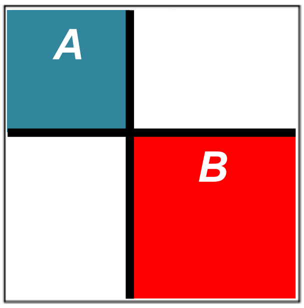
Si ha
$$(D) \quad \max \ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4$$
$$\begin{array}{rcll} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 1 & (y_1) \\ -2x_1 + x_2 + x_4 & \leq & 2 & (y_2) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 1 & (y_3) \end{array}$$

Le condizioni di complementarità corrispondenti a valori di x_i e y_i non nulli si scrivono
$$y_1(1 - x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4) = y_3(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = 0$$
$$x_2(4 + y_1 - y_2 - y_3) = x_3(6 - 2y_1 - y_3) = 0$$

Sostituendo i valori di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si ottiene un'identità, dunque le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi.

3. **Forse non tutti sanno che**… Il foglio su cui è scritto questo testo è in formato A4. Questo vuol dire che se lo si taglia in due parti uguali parallelamente al lato più corto, il rapporto tra il lato maggiore e quello minore dei due rettangoli ottenuti (A5) non cambia. Fatti due conti, ciò significa che se si costruiscono i quadrati sui due lati del foglio, l'area del maggiore è esattamente il doppio dell'area del minore. Questo fatto, noto fin dall'antichità, fu sfruttato da celebri architetti per rendere armoniche le loro realizzazioni (un bellissimo esempio, a Firenze, è la sagrestia di Santa Croce del Brunelleschi).
Diversamente da quanto si crede, sembra invece che il pittore belga Piet Mondrian non desse alcuna importanza a questa tecnica (eppure non faceva che rettangoli: nella figura a sinistra, una sua opera). Magari però il suo segreto era un altro, e chissà se esiste un suo dipinto così concepito (figura a destra): la tela, quadrata, è divisa in quattro parti, due rettangoli uguali (bianchi) e due quadrati di aree A e B. La somma delle aree A e B non supera 1 e, a differenza del nostro foglio, l'area maggiore (B) non supera il doppio dell'area minore (A) meno un quarto della somma delle aree. Si vuole scegliere A e B in modo che B più la metà di A sia massimo. Che rapporto si ottiene tra A e B? Per scoprirlo usate il simplesso.





I vincoli del problema si scrivono:

$$A + B \;\leq\; 1$$
$$B \;\leq\; 2A - \tfrac{1}{4}\,(A + B)$$

e l'obiettivo si scrive

$$\max \quad \tfrac{1}{2}\,A + B$$

Portando al secondo membro i termini noti, moltiplicando per 2 la funzione obiettivo e ricordando che, trattandosi di aree, le variabili A e B sono non negative, il problema si può riscrivere

$$\begin{array}{ll} \max & A + 2B \\ & A + B \leq 1 \\ & -7A + 5B \leq 0 \\ & A, B \geq 0 \end{array}$$

Per risolverlo con il simplesso occorre prima portarlo in forma standard. A questo scopo basta aggiungere due variabili di slack, s_1, s_2. Si ottiene:

$$\begin{array}{ll} \max & A + 2B \\ & A + B + s_1 = 1 \\ & -7A + 5B + s_2 = 0 \\ & A, B, s_2, s_2 \geq 0 \end{array}$$

La prima soluzione di base è degenere:

A	B	s_1	s_2	
1	2	0	0	0
1	1	1	0	1
-7	**5**	0	1	0

Eseguendo un pivot in seconda colonna la tabella diventa

A	B	s_1	s_2	
$^{19}/_{5}$	0	0	$-^{2}/_{5}$	0
$\mathbf{^{12}/_{5}}$	0	1	$-^{1}/_{5}$	1
$-^{7}/_{5}$	1	0	$^{1}/_{5}$	0

Anche questa tabella espone una base degenere. Tuttavia la degenerazione scompare in quanto il pivot successivo, eseguito in prima colonna, non corrisponde a un termine noto nullo:

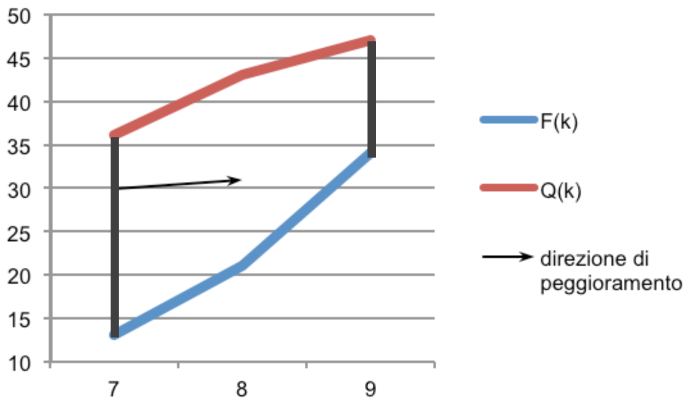
A	B	s_1	s_2	
$^{19}/_{5}$	0	$-^{19}/_{12}$	$-^{1}/_{12}$	$-^{19}/_{12}$
1	0	$^{5}/_{12}$	$-^{1}/_{12}$	$^{5}/_{12}$
$-^{7}/_{5}$	1	$^{7}/_{12}$	$^{1}/_{12}$	$^{7}/_{12}$

Il criterio di ottimalità è soddisfatto: le due aree sono dunque nel rapporto 5:7.

4. **Fibonacci.** Siano date le successioni $F(k) = F(k-1) + F(k-2)$ e $Q(k) = k^2 - F(k)$. Com'è noto, se $F(1) = F(2) = 1$, la prima delle due esprime la successione di Fibonacci. Si prenda l'insieme S dei punti $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ di $\mathbb{R}^2$ della forma $(k, F(k))$ e $(k, Q(k))$ per $k = 7, 8, 9$. Determinate graficamente il sistema di

disequazioni che definisce conv(S). Successivamente calcolate per via grafica l'insieme dei punti di conv(S) dove la funzione $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ raggiunge il suo minimo, indicando la direzione di miglioramento e le rette di livello.

Si calcola facilmente $S = \{(7, 13), (8, 21), (9, 34), (7, 36), (8, 43), (9, 47)\}$. L'involucro convesso è formato da tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ ottenibili come combinazioni convesse di S. La frontiera di conv(S) ha l'aspetto riportato nella figura sottostante.



La frontiera di questo poliedro è delimitata dalle rette di equazioni

$x_1 = 7, x_1 = 9$ (segmenti grigi)

$(21 - 13)(x_1 - 7) = x_2 - 13, (34 - 21)(x_1 - 8) = x_2 - 21$ cioè

$8x_1 - x_2 - 43 = 0 \qquad 13x_1 - x_2 - 83 = 0$ (segmenti azzurri)

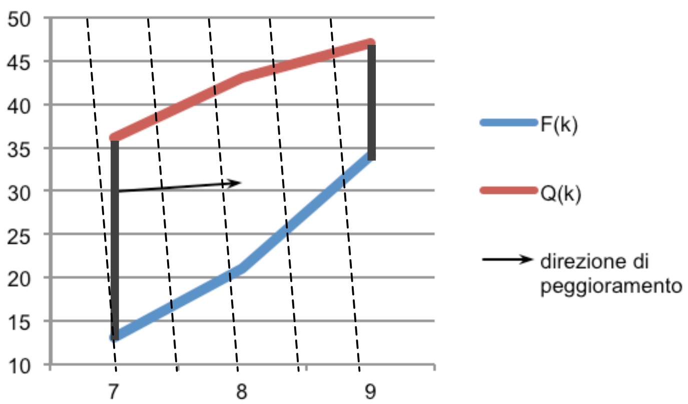
$(43 - 36)(x_1 - 7) = x_2 - 36, (47 - 43)(x_1 - 8) = x_2 - 43$ cioè

$7x_1 - x_2 - 13 = 0 \qquad 4x_1 - x_2 + 11 = 0$ (segmenti rossi)

Il poliedro è quindi definito dalle disequazioni

$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 7\\
x_1 &\leq 9\\
8x_1 - x_2 &\leq 43\\
13x_1 - x_2 &\leq 83\\
7x_1 - x_2 &\geq 13\\
4x_1 - x_2 &\geq -11
\end{aligned}
$$

La direzione di miglioramento è parallela al vettore $\mathbf{d} = (1, 1)$ dei coefficienti della funzione obiettivo, ma diretta in verso opposto. Le linee di livello sono rette (tratteggiate nella figura seguente). L'insieme delle soluzioni ottime è formato dal solo punto (7, 13).



5. **Παντα ρει (tutto scorre)**. Può un problema di matching bipartito formularsi come un problema di flusso a costo minimo? Se sì, sotto quali condizioni e in virtù di quali proprietà? Fornite un esempio a sostegno della vostra tesi.

Sì. Il problema di matching bipartito (pesato) può descriversi come segue: dato un grafo bipartito G, con insieme di nodi $U \cup V$ e insieme di archi $E \in U \times V$, e una funzione peso c: $E \to \mathbb{R}$, determinare un sottoinsieme M di E che abbia peso massimo e tale che ogni nodo di $U \cup V$ non sia toccato da più di un arco di M. A partire da G costruiamo una rete orientando gli archi di G da U verso V e aggiungendo due nodi s, t (quindi, $N = \{s, t\} \cup U \cup V$). L'insieme degli archi A è formato da tutti gli archi di G orientati come si è detto, più tutti gli archi della forma $\{su: u \in U\}$ e tutti gli archi della forma $\{vt: v \in V\}$. La rete è completata dall'arco di ritorno ts. Le capacità sono poste pari a 1 sugli archi su e vt, pari a $+\infty$ su tutti gli altri archi. La funzione peso vale c(uv) per tutti gli archi originari di G, e 0 per tutti gli altri. Il problema di flusso consiste nel determinare una circolazione di peso massimo.
Per rispettare i vincoli di capacità, il flusso entrante in ciascun nodo $u \in U$ non potrà mai eccedere 1, e altrettanto vale per il flusso uscente da ciascun nodo $v \in V$. Di conseguenza i flussi soddisfano i vincoli del problema di matching bipartito:

$$\sum_{v:uv \in E} x_{uv} \leq 1 \quad \text{per ogni } u \in U \qquad\qquad \sum_{u:uv \in E} x_{uv} \leq 1 \quad \text{per ogni } v \in V$$

D'altra parte, essendo la matrice dei vincoli del problema totalmente unimodulare, ogni soluzione di base risulterà intera, e quindi 0-1. Ne consegue che le x_{uv} associate agli archi originari di G formano il vettore caratteristico di un matching.