RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 31 gennaio 2012 **GRUPPO A**

1. Determinare con il metodo di Fourier-Motzkin un sistema di disequazioni che rappresenti l'involucro convesso dei punti (0, 0), (1, 0), (0, 1).

Il problema si risolve applicando la definizione

$$\mathrm{conv}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^2\colon \mathbf{x} = \lambda_1(0, 0) + \lambda_2(1, 0) + \lambda_3(0, 1),\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,\ \lambda_i \geq 0\}$$

e successivamente proiettando nello spazio del vettore **x** (cioè eliminando le variabili λ_i). Il sistema di disequazioni è

$$\begin{aligned} x_1 - \lambda_2 &= 0 \\ x_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &\leq 1 \\ \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(la variabile λ_1 è non negativa e non compare nei primi due vincoli, quindi si può interpretare come slack). Il sistema di disequazioni ottenuto dopo la proiezione è

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Si consideri il problema di programmazione lineare (P)

$$\begin{array}{lllll} \min & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & & & \\ & x_1 + x_2 + x_3 & & = & 2 \\ & 2x_1 & + 3x_4 & = & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq & 0 \end{array}$$

e siano $\mathbf{x} = (0, 0, 2, {}^1/_3)$ ammissibile per (P) e $\mathbf{y} = (1, {}^1/_3)$ ammissibile per il duale (D) di (P). Formulare il problema (D) e, utilizzando le condizioni di complementarità, dire se **x** è una soluzione ottima di (P).

$$\begin{array}{llllll} (D) & \max & 2y_1 + y_2 & & & \\ & & y_1 + 2y_2 & \leq & 2 & (x_1) \\ & & y_1 & \leq & 1 & (x_3) \\ & & \quad\; y_2 & \leq & {}^1/_3 & (x_4) \end{array}$$

(la disequazione associata a x_2 è ridondante). Delle condizioni di complementarità, quelle significative si scrivono

$$x_1(2 - y_1 - 2y_2) = x_3(1 - y_1) = x_4({}^1/_3 - y_2) = 0$$

(le altre hanno coefficienti nulli corrispondenti al soddisfacimento primale). Sostituendo i valori di **x** e **y** si ottiene un'identità, dunque le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi.

3. Si consideri il problema di programmazione lineare (P)

$$\begin{array}{llll} \min & 2x_1 + 3x_2 & & \\ & x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ & k^2x_1 + 2x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 - 2x_2 & \leq & -1 \\ & x_1 & \geq & -1 \\ & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Utilizzando il metodo di Fourier-Motzkin, stabilire se esistono valori di k per cui l'insieme ammissibile del problema (P) non è vuoto.

Eliminando la variabile x_2 si ottiene un insieme di condizioni che definiscono l'intervallo al quale x_1 deve appartenere perché il problema ammetta soluzione. Gli estremi di questo intervallo dipendono da k: è quindi immediato determinare il valore k che rende l'intervallo non vuoto.
Una volta riscritte tutte le disequazioni col segno di $\leq$ si osserva che vi è una sola riga nella quale la variabile x_1 ha coefficiente negativo (precisamente, -1). Siccome in questo caso particolare $k^2 \geq 0$ per ogni k reale, iniziare con l'eliminazione di x_1 non richiede una discussione sui possibili valori di k. Quindi il procedimento risulta altrettanto agevole di quello che inizia con l'eliminazione di x_2.

4. **Seguire le inclinazioni**. Prendete le due rette di equazioni $x_2 = \alpha x_1 - 3$ e $x_2 = -\beta x_1 + 2$ e l'insieme P di tutti i punti $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ che risultano dalla loro intersezione al variare delle inclinazioni α e β negli intervalli $[1, 3]$ e $[¼, 2]$, rispettivamente.

a) Scrivete l'espressione algebrica di tali punti $\mathbf{x}$ e utilizzatela per dimostrare che P coincide con il poliedro

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\geq 3 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

b) Impostate la risoluzione del problema di trovare, mediante il metodo del simplesso o quello di Fourier-Motzkin (a scelta), un punto $\mathbf{x}^*$ di P che minimizzi la funzione lineare $f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 2x_2$.

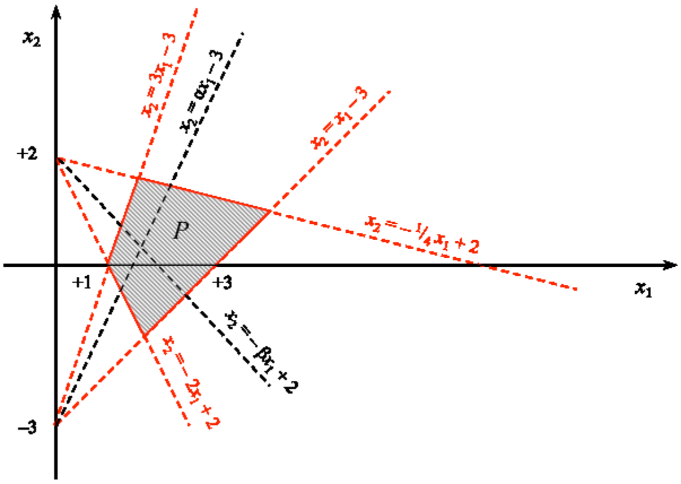
Le coordinate dei punti $\mathbf{x}$ dell'insieme ammissibile soddisfano entrambe le condizioni:

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha x_1 - 3 \\ x_2 &= -\beta x_1 + 2 \end{aligned}$$

Da esse si ricava $(\alpha + \beta)x_1 = 5$, quindi $x_1 = 5/(\alpha + \beta)$. L'ordinata del punto x_1 sulla retta $x_2 = \alpha x_1 - 3$ vale

$$x_2 = \frac{5\alpha}{\alpha + \beta} - 3 = \frac{2\alpha - 3\beta}{\alpha + \beta}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione algebrica del poliedro si riottengono le condizioni $1 \leq \alpha \leq 3$, $¼ \leq \beta \leq 2$.



Quindi l'insieme P è effettivamente rappresentato dalle disequazioni del poliedro. Il problema di ottimizzazione si scrive:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ & 3x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \end{aligned}$$

Per risolverlo con il simplesso occorre prima portarlo in forma standard. A questo scopo occorre anzitutto aggiungere due variabili di slack, y_1, y_2, e due di surplus, z_1, z_2; inoltre bisogna sostituire alla variabile x_2 l'espressione $w_1 - w_2$, con $w_1, w_2 > 0$ (la variabile x1, come si vede dal disegno del poliedro riportato in figura, è non negativa). Si ottiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2w_1 - 2w_2 \\ & 3x_1 - w_1 + w_2 - z_1 = 3 \\ & x_1 + 4w_1 - 4w_2 + y_1 = 8 \\ & x_1 - w_1 + w_2 + y_2 = 3 \\ & 2x_1 + w_1 - w_2 - z_2 = 2 \\ & x_1, w_1, w_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Per portare il problema in forma canonica occorre aggiungere due ulteriori variabili ausiliarie s_1 e s_2 e risolvere il problema canonico

$$\begin{aligned} \min \quad & s_1 + s_2 \\ & 3x_1 - w_1 + w_2 - z_1 + s_1 = 3 \\ & x_1 + 4w_1 - 4w_2 + y_1 = 8 \\ & x_1 - w_1 + w_2 + y_2 = 3 \\ & 2x_1 + w_1 - w_2 - z_2 + s_2 = 2 \\ & x_1, w_1, w_2, y_1, y_2, z_1, z_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Il procedimento, come si vede, è piuttosto oneroso.
Volendo invece risolvere il problema con il metodo di Fourier-Motzkin bisogna determinare un punto del poliedro

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & f & \leq & 0 \\ -3x_1 & + & x_2 & & & \leq & -3 \\ x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 8 \\ x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\ -2x_1 & - & x_2 & & & \leq & -2 \end{array}$$

che abbia la coordinata f al valore più piccolo possibile. In sequenza si ottiene

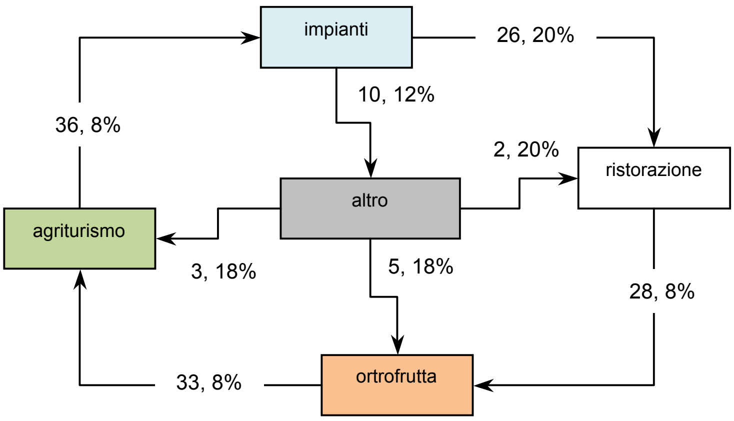
x_1	x_2	f	$\leq$
3	2	–1	0
–3	1	0	–3
1	4	0	8
1	–1	0	3
–2	–1	0	–2

x_1	x_2	f	$\leq$
0	3	–1	–3
0	13	0	21
0	–2	0	6
0	1	–2	–6
0	7	0	14
0	–3	0	4

x_1	x_2	f	$\leq$
0	0	–2	12
0	0	0	120
0	0	–4	–6
0	0	0	70
0	0	–1	1
0	0	0	115
0	0	–6	–14
0	0	0	70

Le disequazioni significative sono $f \geq -6$, $f \geq {}^{3}/_{2}$, $f \geq -1$, $f \geq {}^{7}/_{3}$. Il minimo valore compatibile con tutte è il più grande dei termini noti, vale a dire $f^* = {}^{7}/_{3}$.

4. **Mari o monti?** Nel grafo indicato in figura, il flusso di circolazione rappresenta (in milioni di talleri) gli scambi commerciali del settore agro-turistico-alimentare dell'Amapponia, paese che sta attraversando un grave periodo di crisi finanziaria.



Per contrastare le difficoltà, il nuovo governo di tecnici ha predisposto un piano. Esso comporta, in primo luogo, un incremento delle imposte sul valore aggiunto, che, per le transazioni associate agli archi, saranno fissate ai livelli indicati in percentuale. Ad esempio, gli acquisti di generi ortofrutticoli da parte dei ristoratori saranno tassati all'8%, mentre quelli fatti da altri subiranno una tassazione del 18%. Come reazione al provvedimento ci si attende che i traffici si sposteranno su mete turistiche alternative – tipo mari o monti – e, eventualmente, si ridurranno fino al valore delle soglie di sussistenza indicate in tabella (dove l'elemento *ij* indica, in milioni di talleri, la minima entità degli acquisti fatti dal sotto-settore di riga *i* presso il sotto-settore di colonna *j*).

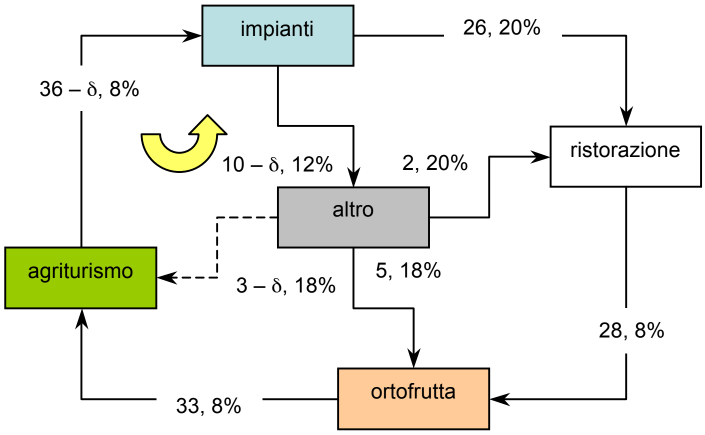
	ortrofrutta	agriturismo	impianti	ristorazione	altro
ortofrutta	–	10	–	–	–
agriturismo	–	–	8	–	–
impianti	–	–	–	4	5
ristorazione	12	–	–	–	–
altro	0	0	–	0	–

Definendo il PIL del settore agro-turistico-alimentare come la somma dei flussi su tutti gli archi indicati, calcolate con il metodo del simplesso su reti di quanto si ridurrà nell'ipotesi che la circolazione si situi a un livello che minimizza le imposte complessivamente pagate da tutti i sotto-settori (al momento, il suo valore è 143 milioni di talleri).

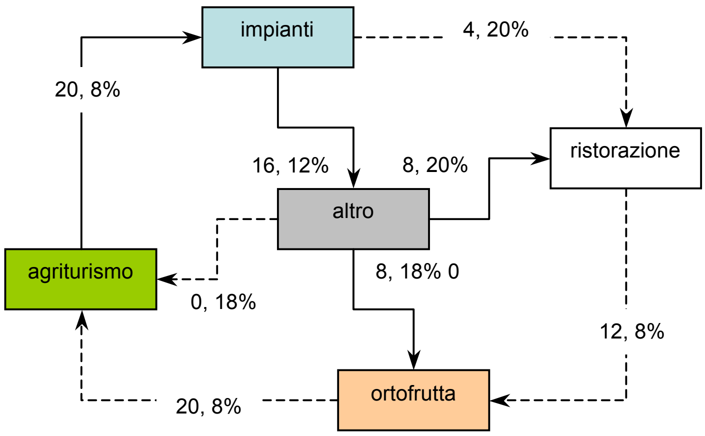
La soluzione riportata sul grafo di figura è una circolazione. Il problema si formula quindi

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{s} \end{aligned}$$

dove **A** indica la matrice di incidenza nodi-archi del grafo, **x** il vettore di distribuzione del flusso e **s** il vettore delle soglie riportate in tabella. Si noti che non avendo ipotizzato un limite allo sviluppo del settore, tutti gli archi hanno capacità illimitata. La soluzione riportata è dunque ammissibile, ma non di base in quanto nessuno dei flussi soddisfa i vincoli di soglia con il segno "=". Per renderla di base basta aggiungere delle circolazioni orientate in modo da soddisfare all'eguaglianza almeno $m - n + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$ di questi vincoli.



Ad esempio, un valore positivo della circolazione indicata dalla freccia riduce della medesima quantità δ tutti i flussi negli archi interessati. L'arco agriturismo-impianti ha soglia 8, quello impianti-altro 5, e quello altro-agriturismo 0. Scegliendo δ = 3 si annulla il flusso in quest'ultimo (indicato a tratteggio) rispettando tutte le soglie. Ripetendo il procedimento in modo da coinvolgere altri 3 archi si perviene a una soluzione di base come, ad esempio, quella illustrata in figura. Gli archi a tratto pieno corrispondono a un albero ricoprente e rappresentano la base associata alla soluzione.



Si tratta ora di verificare l'ottimalità di questa soluzione attraverso il calcolo dei costi ridotti e, eventualmente, aggiornarla con un'operazione analoga che faccia entrare in base archi a costo ridotto negativo (infatti gli archi fuori base saranno tutti fissati a valori di soglia).