RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 28 settembre 2011 **GRUPPO A**

1. Gotham City. Dalla cucina giungevano strani rumori. Vi siete alzati e l'avete visto: un poliedro di Kryptonite a forma di piramide occupava il centro della stanza. I pompieri al telefono vi hanno chiesto: ma quanto è alto? perché dalla misura dipendeva la macchina da prendere per rimuoverlo. Sul pavimento, un foglietto con strane disequazioni: $10x + 5y - z \geq 25$; $-5x + 15y - 3z \geq 5$; $20x + 10y + 5z \leq 120$; $5x + 10y + 2z \leq 60$; $-10x + 5y + z \leq 5$; $z \geq 0$.

Al volo, avete compreso che il piano $z = 0$ rappresentava il pavimento. A quel punto, calcolare l'altezza con Fourier-Motzkin è stato un gioco da ragazzi.

Le disequazioni rappresentano i semispazi che racchiudono la piramide nel sistema cartesiano definito dagli assi x, y, z. L'altezza corrisponde al punto (x, y, z) della piramide per il quale z raggiunge il valore massimo. Si tratta quindi di eliminare le variabili x e y con il metodo di Fourier-Motzkin, cercando il massimo valore per z. Riordinando i segni delle diseguaglianze, la tabella iniziale si scrive

	x	y	z	$\leq$
1	–10	–5	1	–25
2	5	–15	3	–5
3	20	10	5	120
4	5	10	2	60
5	–10	5	1	5

Eliminiamo la variabile y:

	x	y	z	$\leq$
1-3	0	0	7	70
1-4	–15	0	4	10
1-5	–20	0	2	–20
2-3	70	0	21	350
2-4	25	0	12	170
2-5	–25	0	6	10

Poi riordiniamo ed eliminiamo la x:

	x	y	z	$\leq$
1	–15	0	4	10
2	–20	0	2	–20
3	–25	0	6	10
4	0	0	7	70
5	70	0	21	350
6	25	0	12	170

	x	y	z	$\leq$
4	0	0	7	70
1-5	0	0	119	1190
1-6	0	0	56	560
2-5	0	0	56	560
2-6	0	0	58	580
3-5	0	0	189	1890
3-6	0	0	18	180

Chiaramente il valore massimo che può assumere z è $z^* = 10$.

2. Storie dell'altro mondo. La Kryptonite dell'esercizio precedente emette in direzione del pavimento un fascio di neutrini la cui potenza cresce con le coordinate del punto di emissione secondo la formula $p = 3x + 2y - z$. Il punto di massima potenza ha coordinate positive e appartiene al poliedro delimitato dalle ultime 4 disequazioni. Da lì, occorre scavare un tunnel di circa 800 km per permettere ai neutrini di attraversare il pianeta Terra senza danni[1]. Presto! trovate il punto con il metodo del simplesso.

Il problema è

$$\begin{array}{lrl} \max & 3x + 2y - z & \\ & 20x + 10y + 5z & \leq 120 \\ & 5x + 10y + 2z & \leq 60 \\ & -10x + 5y + z & \leq 5 \\ & x, y, z & \geq 0 \end{array}$$

Posto in forma standard con le variabili non negative di slack s_1, s_2, s_3, è già in forma canonica.

[1] Come da comunicato ministeriale.

x	y	z	s_1	s_2	s_3	
3	2	–1	0	0	0	0
20	10	5	1	0	0	120
5	10	2	0	1	0	60
–10	5	1	0	0	1	5

Con un pivot in posizione 1-1 si ricava

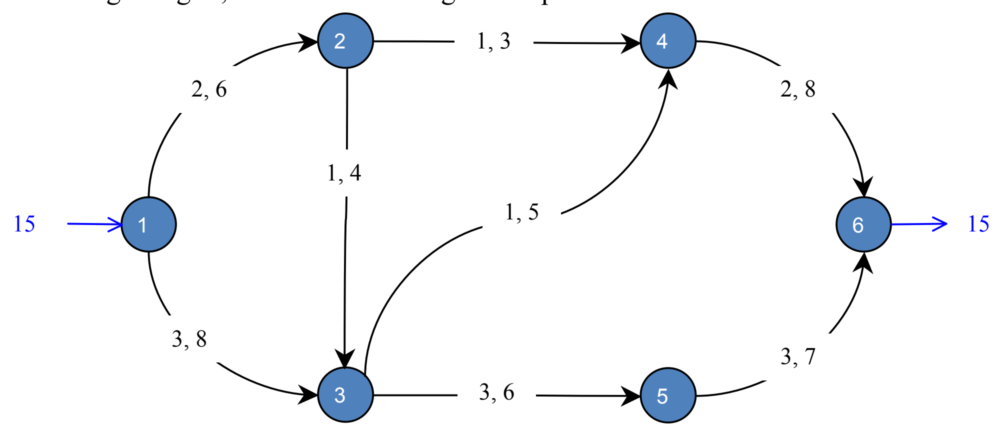
x	y	z	s_1	s_2	s_3	
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$	0	0	0	–18
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	0	0	6
0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	30
0	10	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	65

Con un pivot in posizione 2-2 si ha poi

x	y	z	s_1	s_2	s_3	
0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	0	–20
1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	0	4
0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	0	4
0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{4}{3}$	1	25

La soluzione trovata è ottima. Si deve perciò iniziare a scavare nel punto di coordinate $x = y = 4$.

3. Nella rete di figura, la coppia di interi c_{ij}, c_{ij}' associata a ciascun arco ij riporta il costo per unità di capacità installata (primo numero) e per unità di flusso che attraversa l'arco stesso: ad esempio, 3 unità di capacità sull'arco 34 costano $3 \cdot 1 = 3$ euro; una volta installate, l'arco può essere attraversato da flussi di valore ≤ 3, e l'attraversamento di ogni unità di flusso costa 5 euro. La società che gestisce la rete deve decidere i valori delle capacità u_{ij} da installare sugli archi per servire la domanda di trasferimento dal nodo 1 al nodo 6 indicata in figura. Per esempio, una soluzione possibile consiste nell'installare $u_{12} = u_{46} = 20$, $u_{24} = 15$ e $u_{ij} = 0$ per tutti gli altri archi. Tale soluzione costa $2 \cdot 20 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 95$ euro e consente di instradare tutto il flusso lungo il cammino {12, 24, 46} ricavando $(6 + 3 + 8) \cdot 15 = 255$ euro, con un guadagno netto di $255 - 95 = 160$ euro. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare il guadagno, e descrivere un algoritmo per calcolare una soluzione ottima.



Il problema si formula

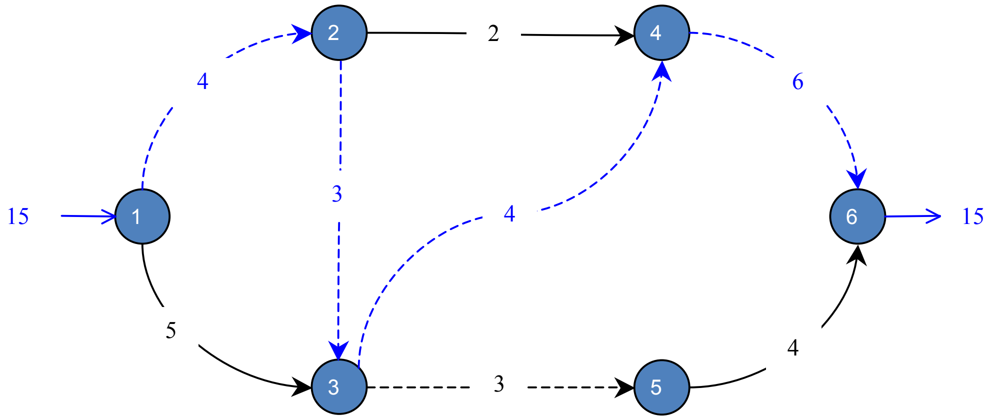
$$\max \quad \mathbf{c'x} - \mathbf{cu}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$$
$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$$

dove $\mathbf{A}$ rappresenta la matrice di incidenza nodi-archi della rete e $\mathbf{d} = (-15, 0, 0, 0, 0, 15)$ il vettore domanda. Poiché i costi di installazione delle capacità sono positivi, una soluzione nella quale la capacità u_{ij} installata su un arco ij sia strettamente maggiore del flusso x_{ij} che lo attraversa sarà sempre migliorata da una soluzione nella quale l'arco ij ha capacità $u_{ij} = x_{ij}$. Quindi aggiungere al problema i vincoli $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ (che equivale a eliminare il vettore $\mathbf{u}$) non cambia il valore della soluzione ottima. Così riformulato il problema si scrive

$$\max \quad (\mathbf{c'} - \mathbf{c})\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Dal momento che non vi sono capacità, il problema si risolve inviando tutto il flusso lungo il cammino di peso massimo dal nodo 1 al nodo 6. Dal momento che il grafo è privo di circuiti, tale cammino si può calcolare con la formula di ricorrenza $c_j = \max_{i<j}\{c_i + (c_{ij}' - c_{ij})\}$.

La figura sottostante riporta il risultato: il tratteggio indica l'albero ricoprente dei cammini massimi, il colore il cammino seguito dal flusso. Su ciascuno degli archi di questo cammino la società installerà 15 unità di capacità, mentre installerà capacità 0 su tutti gli altri archi. Il valore della soluzione è pari alla lunghezza del cammino moltiplicata per le unità di flusso da spedire: il guadagno, al netto delle spese di installazione, è pertanto $(4 + 3 + 4 + 6)\cdot 15 = 255$ euro.



4. Quale dei tre problemi seguenti NON è il duale di

$$
\begin{array}{llll}
\min & 2x_1 - 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 & & \\
 & 2x_1 + x_3 & \geq & 1 \\
 & x_1 + 3x_2 - x_4 & \leq & 3 \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 10 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

D_1)
$$
\begin{array}{llll}
\max & y_1 - 3y_2 - 10y_3 & & \\
 & 2y_1 - y_2 - y_3 & \leq & 2 \\
 & 3y_2 + 2y_3 & \geq & 18 \\
 & y_1 - 3y_3 & = & 4 \\
 & y_2 - 4y_3 & = & 5 \\
 & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

D_2)
$$
\begin{array}{llll}
\max & y_1 + 3y_2 + 10y_3 & & \\
 & 2y_1 - y_2 + y_3 & \leq & 2 \\
 & 3y_2 - 2y_3 & \geq & 18 \\
 & y_1 + 3y_3 & = & 4 \\
 & y_2 + 4y_3 & = & 5 \\
 & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

D_3)
$$
\begin{array}{llll}
\min & -y_1 + 3y_2 - 10y_3 & & \\
 & 2y_1 - y_2 + y_3 & \leq & 2 \\
 & -y_1 - 3y_3 & = & -4 \\
 & 3y_2 - 2y_3 & \geq & 18 \\
 & y_2 + 4y_3 & = & 5 \\
 & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 28 settembre 2011 **GRUPPO B**

1. Gotham City. Dalla cucina giungevano strani rumori. Vi siete alzati e l'avete visto: un poliedro di Kryptonite a forma di piramide occupava il centro della stanza. I pompieri al telefono vi hanno chiesto: ma quanto è alto? perché dalla misura dipendeva la macchina da prendere per rimuoverlo. Sul pavimento, un foglietto con strane disequazioni: $9x + 18y - 4z \geq 18$; $36x + 9y - 2z \geq 72$; $3x + 6y + z \leq 27$; $6x + 3y + z \leq 27$; $9y - z \geq 9$; $z \geq 0$.

Al volo, avete compreso che il piano $z = 0$ rappresentava il pavimento. A quel punto, calcolare l'altezza con Fourier-Motzkin è stato un gioco da ragazzi.

Le disequazioni rappresentano i semispazi che racchiudono la piramide nel sistema cartesiano definito dagli assi x, y, z. L'altezza corrisponde al punto (x, y, z) della piramide per il quale z raggiunge il valore massimo. Si tratta quindi di eliminare le variabili x e y con il metodo di Fourier-Motzkin, cercando il massimo valore per z. Riordinando i segni delle diseguaglianze, la tabella iniziale si scrive:

	x	y	z	$\leq$
1	–9	–18	4	–18
2	–36	–9	2	–72
3	3	6	1	27
4	6	3	1	27
5	0	–9	1	–9

Eliminiamo la x:

	x	y	z	$\leq$
1-3	0	0	7	63
1-4	0	–27	11	45
2-3	0	63	14	252
2-4	0	9	8	90
5	0	–9	1	–9

Poi riordiniamo:

	x	y	z	$\leq$
1	0	0	7	63
2	0	–27	11	45
3	0	–9	1	–9
4	0	63	14	252
5	0	9	8	90

ed eliminiamo la y:

	x	y	z	$\leq$
1	0	0	7	63
2-4	0	0	119	1071
2-5	0	0	35	315
3-4	0	0	21	189
3-5	0	0	9	81

Chiaramente il valore massimo che può assumere z è $z^* = 9$.

2. Storie dell'altro mondo. La Kryptonite dell'esercizio precedente emette in direzione del pavimento un fascio di neutrini la cui potenza cresce con le coordinate del punto di emissione secondo la formula $p = 2x + 4y - z$. Il punto di massima potenza ha coordinate positive e appartiene al poliedro delimitato dalle ultime 4 disequazioni. Da lì, occorre scavare un tunnel di circa 800 km per permettere ai neutrini di attraversare il pianeta Terra senza danni[1]. Presto! trovate il punto con il metodo del simplesso.

Il problema è

$$\begin{array}{rrcl} \max & 2x + 4y - z & & \\ & 3x + 6y + z & \leq & 27 \\ & 6x + 3y + z & \leq & 27 \\ & 9y - z & \geq & 9 \\ & x, y, z & \geq & 0 \end{array}$$

Posto in forma standard con variabili non negative di slack s_1, s_2 e variabile di surplus s_3, non è in forma canonica. Occorre risolvere il problema ausiliario, minimizzando una variabile u aggiunta al primo membro del terzo vincolo:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	u	
0	0	0	0	0	0	1	0
3	6	1	1	0	0	0	27
6	3	1	0	1	0	0	27
0	9	–1	0	0	–1	1	9

Sottraendo l'ultima riga alla riga 0 si ricava la forma canonica:

[1] Come da comunicato ministeriale.

x	y	z	s_1	s_2	s_3	u	
0	–9	1	0	0	1	0	–9
3	6	1	1	0	0	0	27
6	3	1	0	1	0	0	27
0	9	–1	0	0	–1	1	9

Un pivot in posizione 3-2 restituisce una soluzione ottima del problema ausiliario e ammissibile per il problema iniziale:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	u	
0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	$5/3$	1	0	$2/3$	$-2/3$	21
6	0	$4/3$	0	1	$1/3$	$-1/3$	24
0	1	$-1/9$	0	0	$-1/9$	$1/9$	1

Eliminiamo la u e ripristiniamo la funzione obiettivo originale. Per ottenere la forma canonica basta ora sottrarre alla riga 0 la riga 3 moltiplicata per 4:

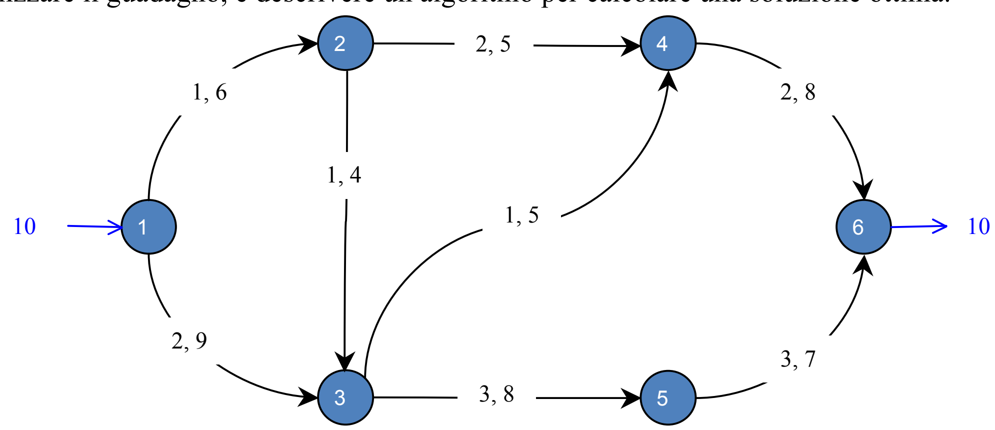
x	y	z	s_1	s_2	s_3	
2	0	$-5/9$	0	0	$4/9$	–4
3	0	$5/3$	1	0	$2/3$	21
6	0	$4/3$	0	1	$1/3$	24
0	1	$-1/9$	0	0	$-1/9$	1

La variabile s_3 è candidata a entrare in base. Con un pivot in posizione 1-6 si ottiene:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	
0	0	$-5/3$	$-2/3$	0	0	–18
$9/2$	0	$5/2$	$3/2$	0	1	$63/2$
$9/2$	0	$1/2$	$-1/2$	1	0	$27/2$
$1/2$	1	$1/6$	$1/6$	0	0	$9/2$

La soluzione trovata è ottima. Si deve perciò iniziare a scavare nel punto di coordinate $x = 0$, $y = 9/2$.

3. Nella rete di figura, la coppia di interi c_{ij}, c_{ij}' associata a ciascun arco ij riporta il costo per unità di capacità installata (primo numero) e per unità di flusso che attraversa l'arco stesso: ad esempio, 3 unità di capacità sull'arco 34 costano $3 \cdot 1 = 3$ euro; una volta installate, l'arco può essere attraversato da flussi di valore ≤ 3, e l'attraversamento di ogni unità di flusso costa 5 euro. La società che gestisce la rete deve decidere i valori delle capacità u_{ij} da installare sugli archi per servire la domanda di trasferimento dal nodo 1 al nodo 6 indicata in figura. Per esempio, una soluzione possibile consiste nell'installare $u_{12} = u_{46} = 12$, $u_{24} = 10$ e $u_{ij} = 0$ per tutti gli altri archi. Tale soluzione costa $1 \cdot 12 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 12 = 56$ euro e consente di instradare tutto il flusso lungo il cammino {12, 24, 46} ricavando $(6 + 5 + 8) \cdot 10 = 190$ euro, con un guadagno netto di $190 - 56 = 134$ euro. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare il guadagno, e descrivere un algoritmo per calcolare una soluzione ottima.



Il problema si formula

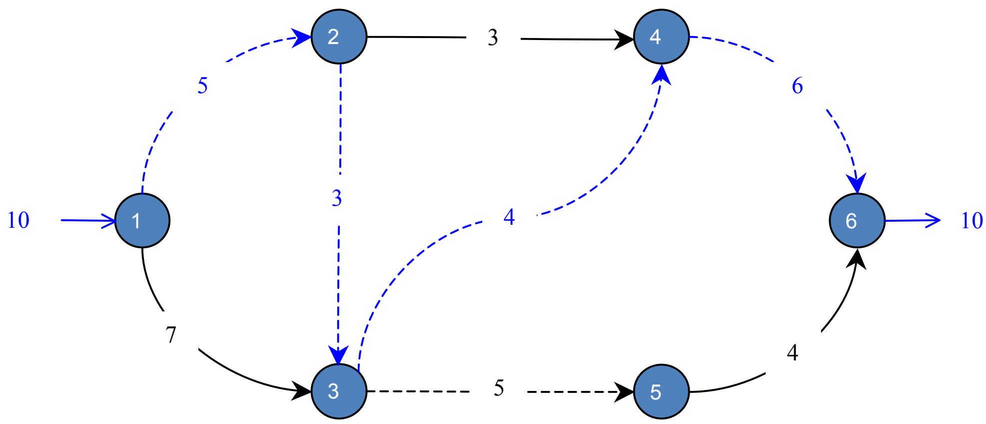
$$\max \quad \mathbf{c'x} - \mathbf{cu}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$$
$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$$

dove $\mathbf{A}$ rappresenta la matrice di incidenza nodi-archi della rete e $\mathbf{d} = (-10, 0, 0, 0, 0, 10)$ il vettore domanda. Poiché i costi di installazione delle capacità sono positivi, una soluzione nella quale la capacità u_{ij} installata su un arco ij sia strettamente maggiore del flusso x_{ij} che lo attraversa sarà sempre migliorata da una soluzione nella quale l'arco ij ha capacità $u_{ij} = x_{ij}$. Quindi aggiungere al problema i vincoli $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ (che equivale a eliminare il vettore $\mathbf{u}$) non cambia il valore della soluzione ottima. Così riformulato il problema si scrive

$$\begin{array}{rl} \max & (\mathbf{c}' - \mathbf{c})\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Dal momento che non vi sono capacità, il problema si risolve inviando tutto il flusso lungo il cammino di peso massimo dal nodo 1 al nodo 6. Dal momento che il grafo è privo di circuiti, tale cammino si può calcolare con la formula di ricorrenza $c_j = \max_{i<j}\{c_i + (c_{ij}' - c_{ij})\}$.

La figura sottostante riporta il risultato: il tratteggio indica l'albero ricoprente dei cammini massimi, il colore il cammino seguito dal flusso. Su ciascuno degli archi di questo cammino la società installerà 15 unità di capacità, mentre installerà capacità 0 su tutti gli altri archi. Il valore della soluzione è pari alla lunghezza del cammino moltiplicata per le unità di flusso da spedire: il guadagno, al netto delle spese di installazione, è pertanto $(5 + 3 + 4 + 6)\cdot 10 = 180$ euro.



4. Quale dei tre problemi seguenti NON è il duale di

$$\begin{array}{rlcl} \min & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & & \\ & 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & \leq & 16 \\ & 8x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 12 \\ & 4x_2 + 2x_3 & \geq & 10 \\ & x_1, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

D_1) $$\begin{array}{rlcl} \min & -16y_1 + 12y_2 + 10y_3 & & \\ & -2y_1 + 8y_2 & \leq & 3 \\ & y_1 + 3y_2 + 4y_3 & = & 2 \\ & 2y_1 + y_2 + 2y_3 & \leq & -1 \\ & -y_1 - 2y_2 & = & 1 \\ & y_1, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

D_2) $$\begin{array}{rlcl} \max & 6y_1 + 5y_2 - 8y_3 & & \\ & 8y_1 - 2y_3 & \leq & 3 \\ & 3y_1 + 4y_2 + y_3 & = & 2 \\ & y_1 + 2y_2 + 2y_3 & \leq & -1 \\ & 2y_1 + y_3 & = & -1 \\ & y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

D_3) $$\begin{array}{rlcl} \min & 16y_1 + 12y_2 - 10y_3 & & \\ & -2y_1 - 8y_2 & \leq & 3 \\ & y_1 - 3y_2 + 4y_3 & = & 2 \\ & -2y_1 + y_2 - 2y_3 & \geq & 1 \\ & y_1 + 2y_3 & = & -1 \\ & y_1, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$