RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 14 settembre 2011 **GRUPPO A**

1. Determinare con il metodo di Fourier-Motzkin un sistema di disequazioni che rappresenti l'involucro convesso dei punti (0, 1), (2, 2), (4, 5), (2, 3), (1, 4). Il poliedro si ottiene facilmente per via grafica: potete quindi sia verificare la correttezza della soluzione sia risolvere il problema seguente senza aver risolto questo.

L'involucro convesso conv(S) di un insieme $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ di punti è dato da tutti i punti $\mathbf{x}$ ottenibili per combinazione convessa dai punti di S. Il che vuol dire $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{u}_m$, con $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, e, nel caso in esame, $x_1 = 0\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4 + 1\lambda_5$, $x_2 = 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 + 4\lambda_5$. Le due equazioni che definiscono i punti $\mathbf{x}$, insieme con l'equazione e le 5 disequazioni che definiscono le proprietà dei coefficienti della combinazione convessa, formano un poliedro di $\mathbb{R}^7$, mentre il poliedro cercato è in $\mathbb{R}^2$: per ottenerlo occorre dunque proiettare il primo sullo spazio delle variabili x_1, x_2 eliminando, con il metodo di Fourier-Motzkin, le variabili $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$. La tabella iniziale è

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	$\geq$
1	–1	0	0	2	4	2	1	0
2	1	0	0	–2	–4	–2	–1	0
3	0	–1	1	2	5	3	4	0
4	0	–1	–1	–2	–5	–3	–4	0
5	0	0	1	1	1	1	1	1
6	0	0	–1	–1	–1	–1	–1	–1
7	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	0

La parte operativa, piuttosto laboriosa, può iniziare eliminando la variabile λ_1. Osserviamo che le combinazioni coniche della terza riga con la quarta e della quinta la sesta restituiscono disequazioni banali. Le combinazioni interessanti sono quindi solo 3-6, 4-5, 4-7, 6-7.

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	$\geq$
1	–1	0	0	2	4	2	1	0
2	1	0	0	–2	–4	–2	–1	0
3-6	0	–1	0	1	4	2	3	0
4-5	0	–1	0	–1	–4	–2	–3	1
4-7	0	–1	0	–2	–5	–3	–4	0
6-7	0	0	0	–1	–1	–1	–1	–1
8	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	0

Il procedimento, così impostato, conduce alla definizione di un poliedro di $\mathbb{R}^2$. Questo poliedro è delimitato dalle disequazioni:

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 11 \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 2x_2 &\leq -2 \end{aligned}$$

2. Risolvere, tramite il metodo del simplesso, il problema di determinare il punto di minimo della funzione $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 3x_2$ nel poliedro soluzione dell'Esercizio 1. Anche questo problema si risolve con facilità per via grafica, e ciò vi consente di verificare l'esattezza del risultato.

Com'è noto, se un problema di programmazione lineare ammette un ottimo, ne esiste almeno uno tra i suoi vertici. Nel caso in questione un ottimo esiste certamente, perché il poliedro è l'involucro convesso di un insieme finito di punti ed è dunque limitato. Siccome poi i punti estremi di conv(S) sono in S, e questi ultimi sono tutti ammissibili, per sapere qual è la soluzione ottima del problema basta calcolare il valore della funzione $z(\mathbf{x})$ per tutti i punti $\mathbf{x}$ dati nell'Esercizio 1. Il minimo, di valore –11, si ha per $\mathbf{x}$ = (1, 4). Eseguiamo ora i calcoli richiesti dall'Esercizio 2.

Il problema, posto in forma standard tramite le variabili non negative di slack s_1, s_2, s_3 e di surplus s_4, non è in forma canonica. Occorre quindi risolvere prima il problema ausiliario, che ha la tabella iniziale:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	w	
0	0	0	0	0	0	1	0
–3	1	1	0	0	0	0	1
–1	3	0	1	0	0	0	11
3	–2	0	0	1	0	0	2
–1	2	0	0	0	–1	1	2

La forma canonica si ottiene sottraendo l'ultima riga alla riga 0:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	w	
1	–2	0	0	0	1	0	–2
–3	1	1	0	0	0	0	1
–1	3	0	1	0	0	0	11
3	–2	0	0	1	0	0	2
–1	2	0	0	0	–1	1	2

Con un pivot in posizione 1-2 si ricava

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	w	
–6	0	2	0	0	1	0	0
–3	1	1	0	0	0	0	1
8	0	–3	1	0	0	0	8
–3	0	2	0	1	0	0	4
5	0	–2	0	0	–1	1	0

Pur non soddisfacendo il criterio di ottimalità la soluzione è ottima, in quanto di valore nullo (il problema ausiliario non ammette soluzioni di valore negativo). Recuperando i coefficienti della funzione obiettivo $z(\mathbf{x})$ la tabella iniziale del problema si scrive:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	w	
2	–3	0	0	0	0	0	0
–3	1	1	0	0	0	0	1
8	0	–3	1	0	0	0	8
–3	0	2	0	1	0	0	4
5	0	–2	0	0	–1	1	0

Per renderla canonica dobbiamo moltiplicare per 3 la riga 1 e sommarla alla riga 0. Si ottiene:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	w	
–7	0	3	0	0	0	0	3
–3	1	1	0	0	0	0	1
8	0	–3	1	0	0	0	8
–3	0	2	0	1	0	0	4
5	0	–2	0	0	–1	1	0

Ora il pivot va necessariamente operato in posizione 1-4 (base degenere):

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	w	
0	0	1/5	0	0	–7/5	7/5	3
0	1	–1/5	0	0	–3/5	3/5	1
0	0	1/5	1	0	8/5	–8/5	8
0	0	4/5	0	1	–3/5	3/5	4
1	0	–2/5	0	0	–1/5	1/5	0

Il successivo pivot in posizione 2-6 restituisce:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	w	
0	0	3/8	0	0	0	0	10
0	1	–1/8	3/8	0	0	0	4
0	0	1/8	5/8	0	1	–1	5
0	0	7/8	3/8	1	0	0	7
1	0	–3/8	1/8	0	0	0	1

La base trovata è ottima. La soluzione è proprio $\mathbf{x} = (1, 4)$ e ha valore -10.

3. Le equazioni $(3 - y_1 - 5y_2)\, x_1 + (2 + y_1 - 6y_2)\, x_2 \; = \; y_1 (2 - x_1 + x_2) + y_2 (4 - 5x_1 - 6x_2) \; = \; 0$ descrivono le condizioni di complementarità di una coppia di problemi della forma

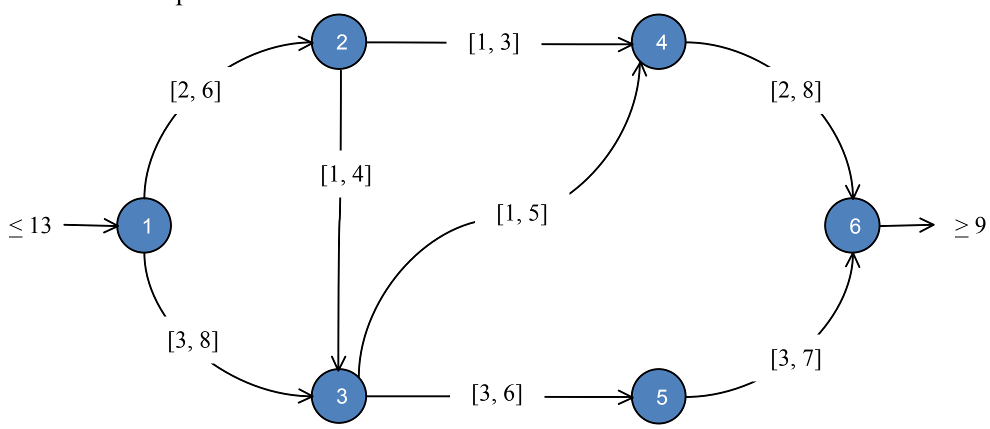
$$P)\ \min\ \mathbf{cx} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad\qquad D)\ \max\ \mathbf{yb} \quad \mathbf{yA} \leq \mathbf{c} \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Quali sono esattamente questi due problemi?

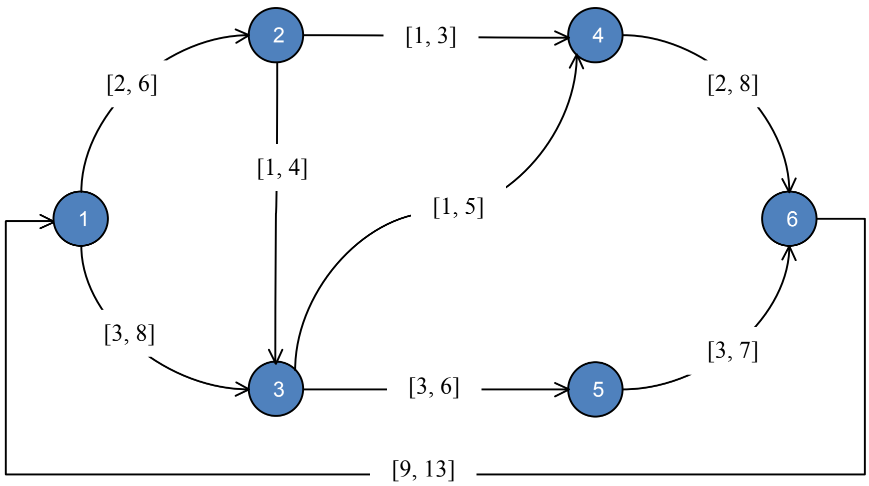
$$\text{P)}\ \min\ 3x_1 + 2x_2 \quad x_1 - x_2 \geq 2 \quad 5x_1 + 6x_2 \geq 4 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{D)}\ \max\ 2y_1 + 4y_2 \quad y_1 + 5y_2 \leq 3 \quad -y_1 + 6y_2 \leq 2 \quad y_1, y_2 \geq 0$$

4. Nella rete di figura, l'intervallo di interi associato a ciascun arco riporta i limiti di variabilità del flusso che può attraversare l'arco stesso: ad esempio, l'arco 34 può essere attraversato da flussi di valore non inferiore a 1 e non superiore a 5. In questa rete, inoltre, il nodo 1 è sorgente di un flusso che al massimo può valere 13 unità, mentre il nodo 6 richiede un flusso almeno pari a 9 unità. Riformulare i vincoli di capacità, soglia e conservazione del flusso in modo da portare tutte le soglie a zero, ed esibire sulla rete modificata un flusso che dimostri che la richiesta del nodo 6 può essere soddisfatta dal nodo 1, ovvero stabilire che ciò non è possibile.

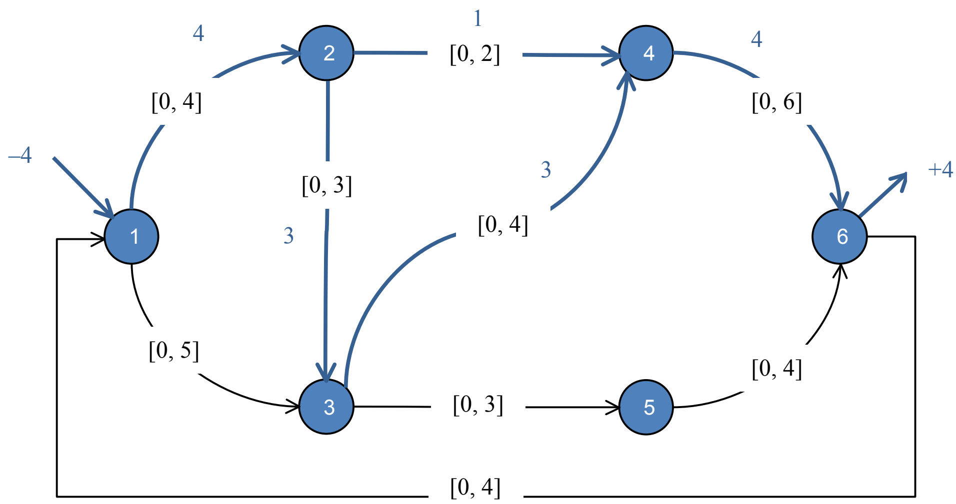


Le condizioni di domanda del nodo 6 e offerta del nodo 1 si possono riassumere introducendo un arco di ritorno 61 con soglia 9 e capacità 13.



Indicati con $\mathbf{l}$ e $\mathbf{u}$ i vettori che raccolgono i valori di soglie e capacità, si tratta di stabilire quindi se la rete così trasformata ammette un flusso $\mathbf{x}$ di circolazione, cioè tale che $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$, dove con $\mathbf{A}$ si è indicata la matrice di incidenza nodi-archi. Eseguita la trasformazione lineare $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{l}$, i vincoli precedenti diventano $\mathbf{Ax}' = -\mathbf{Al}$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{x}' \leq \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{l}$.

Semplici calcoli mostrano che il vettore di domanda $-\mathbf{Al}$ ha componenti non nulle nei soli nodi 1 e 6, dove vale rispettivamente -4 e $+4$. Questa domanda può essere soddisfatta con la distribuzione di flusso mostrata nella figura seguente. Quindi il problema iniziale ammette soluzione.


4
1
4
[0, 4]
[0, 2]
[0, 6]
–4
[0, 3]
3
+4
3
[0, 4]
1
2
3
4
5
6
[0, 5]
[0, 3]
[0, 4]
[0, 4]

RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 14 settembre 2011 **GRUPPO B**

1. Determinare con il metodo di Fourier-Motzkin un sistema di disequazioni che rappresenti l'involucro convesso dei punti (0, 1), (3, 0), (4, 4), (2, 3), (1, 3). Il poliedro si ottiene facilmente per via grafica: potete quindi sia verificare la correttezza della soluzione sia risolvere il problema seguente senza aver risolto questo.

Il procedimento è analogo a quello descritto per il gruppo A.

2. Risolvere, tramite il metodo del simplesso, il problema di determinare il punto di minimo della funzione $z(\mathbf{x}) = 3x_1 - 2x_2$ nel poliedro soluzione dell'Esercizio 1. Anche questo problema si risolve con facilità per via grafica, e ciò vi consente di verificare l'esattezza del risultato.

Il procedimento è analogo a quello descritto per il gruppo A.

3. Le equazioni $(3 - 2y_1 - y_2)\, x_1 + (2 + y_1 - 5y_2)\, x_2 = y_1 (4 - 2x_1 + x_2) + y_2 (1 - x_1 - 5x_2) = 0$ descrivono le condizioni di complementarità di una coppia di problemi della forma

$$P)\ \min\ \mathbf{cx} \qquad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

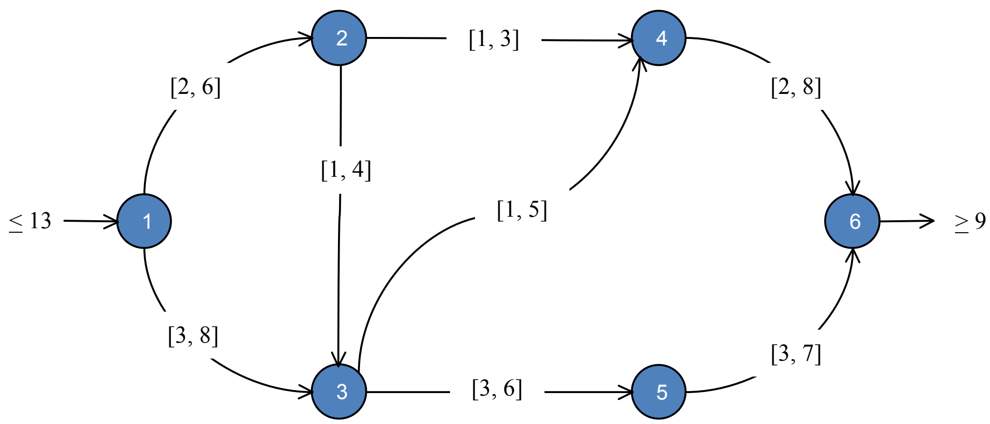
$$D)\ \max\ \mathbf{yb} \qquad \mathbf{yA} \leq \mathbf{c} \qquad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Quali sono esattamente questi due problemi?

$$\text{P)}\ \min\ 3x_1 + 4x_2 \qquad 2x_1 - x_2 \geq 4 \qquad x_1 + 5x_2 \geq 1 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{D)}\ \max\ y_1 + 3y_2 \qquad 2y_1 + y_2 \leq 3 \qquad -y_1 + 5y_2 \leq 2 \qquad y_1, y_2 \geq 0$$

4. Nella rete di figura, l'intervallo di interi associato a ciascun arco riporta i limiti di variabilità del flusso che può attraversare l'arco stesso: ad esempio, l'arco 34 può essere attraversato da flussi di valore non inferiore a 1 e non superiore a 5. In questa rete, inoltre, il nodo 1 è sorgente di un flusso che al massimo può valere 13 unità, mentre il nodo 6 richiede un flusso almeno pari a 9 unità. Riformulare i vincoli di capacità, soglia e conservazione del flusso in modo da portare tutte le soglie a zero, ed esibire sulla rete modificata un flusso che dimostri che la richiesta del nodo 6 può essere soddisfatta dal nodo 1, ovvero stabilire che ciò non è possibile.



Vedi soluzione Gruppo A.