

1. Il vettore $\mathbf{w} = (7/2, 0, 1/4)$ è combinazione **solamente conica** dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = (-1/2, 3/2, 0), \mathbf{v}_2 = (5/2, -1/2, 1/6), \mathbf{v}_3 = (0, -1/8, 3/4)$$

2. **2.059.128-esimo quesito con la Susi**

Alfonso, Bartolomeo e Cesidio compiono gli anni lo stesso giorno. Alfonso ha 2 anni più di Bartolomeo, il quale ha il doppio dell'età di Cesidio, e la somma dei loro anni non supera 12. Nonna Domitilla regalerà ad Alfonso, Bartolomeo e Cesidio rispettivamente una, due e tre caramelle per ogni candelina della torta. Il massimo numero di caramelle compatibile coi vincoli dà il giorno del mese in cui avvengono i fatti. Qual è? Trovatelo col metodo del simplesso indicando con a , b e c gli anni dei tre pargoletti (non si vince niente, però).

Il problema si può formulare impostando le seguenti condizioni:

$$a = b + 2$$

Alfonso ha 2 anni più di Bartolomeo

$$b = 2c$$

Bartolomeo ha il doppio degli anni di Cesidio

$$a + b + c \leq 12$$

La somma delle età non supera 12

Il giorno del compleanno si ottiene massimizzando il numero di caramelle della nonna:

$$\max \quad a + 2b + 3c$$

Per avere la forma standard basta quindi aggiungere una variabile di slack s al terzo vincolo. Il problema ausiliario ha la seguente tabella:

a	b	c	s	w_1	w_2	
				1	1	
1	-1			1		2
	1	-2			1	0
1	1	1	1			12

che in forma canonica si riscrive:

a	b	c	s	w_1	w_2	
-1		2				-2
1	-1			1		2
	1	-2			1	0
1	1	1	1			12

Eseguendo le operazioni di pivot necessarie a far uscire dalla base le due variabili ausiliarie si ottiene:

a	b	c	s	w_1	w_2	
	-1	2		1		0
1	-1			1		2
	1	-2			1	0
	2	1	1	-1		10

a	b	c	s	w_1	w_2	
				1	1	0
1		-2		1	1	2
	1	-2			1	0
		5	1	-1	-2	10

(notiamo che la seconda iterazione è degenera). Eliminando le variabili ausiliarie e ripristinando la funzione obiettivo originale:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>s</i>	
1	2	3		0
1		-2		2
	1	-2		0
		5	1	10

Portando poi in forma canonica si ricava:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>s</i>	
		9		-2
1		-2		2
	1	-2		0
		5	1	10

Con un pivot in colonna e riga 3 si ha quindi

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>s</i>	
			-9/5	-20
1			2/5	6
	1		2/5	4
		1	1/5	2

Il 20 del mese Alfonso, Bartolomeo e Cesidio compiono quindi rispettivamente 6, 4 e 2 anni.

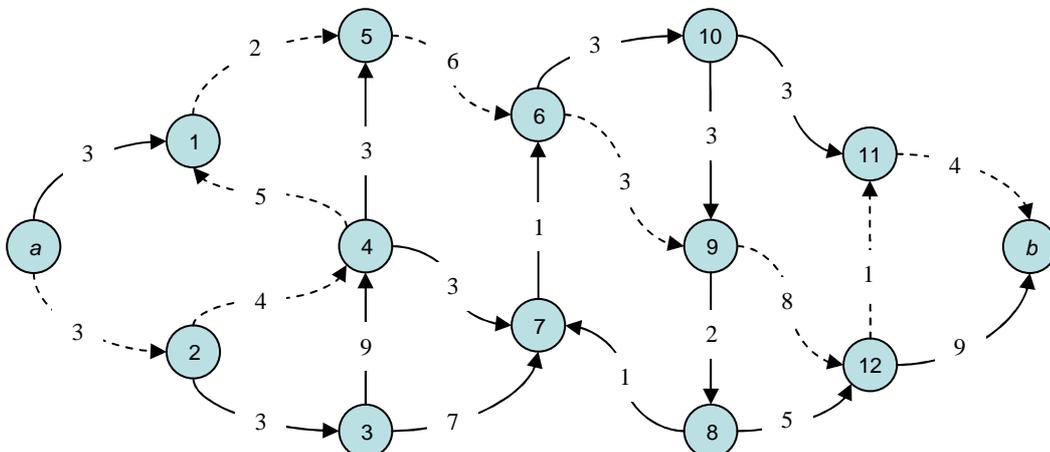
3. Scrivete il duale del seguente problema:
- $$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 3x_2 \\ & -2x_2 - 6x_3 \leq -5 \\ & -x_2 - 3x_3 = 0 \\ & 3x_1 - 4x_3 \leq -4 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \max \quad \begin{aligned} & 5y_1 + 4y_3 \\ & y_3 = -\frac{1}{3} \\ & 2y_1 + y_2 \leq -3 \\ & 6y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 0 \\ & y_1, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato:
- $$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & -x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Il valore minimo di z è 2. In corrispondenza, le variabili assumono i valori: $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1$.

5. Navigatore e poeta

Secondo me il sistema GPS installato sulla mia macchina ha dei problemi. Per carità, trova sempre un percorso affascinante, bellissimi paesaggi pieni di fiori – ma alla fine arrivo sempre tardi. L'ultima volta per mandarmi da a a b mi ha proposto l'itinerario tratteggiato.

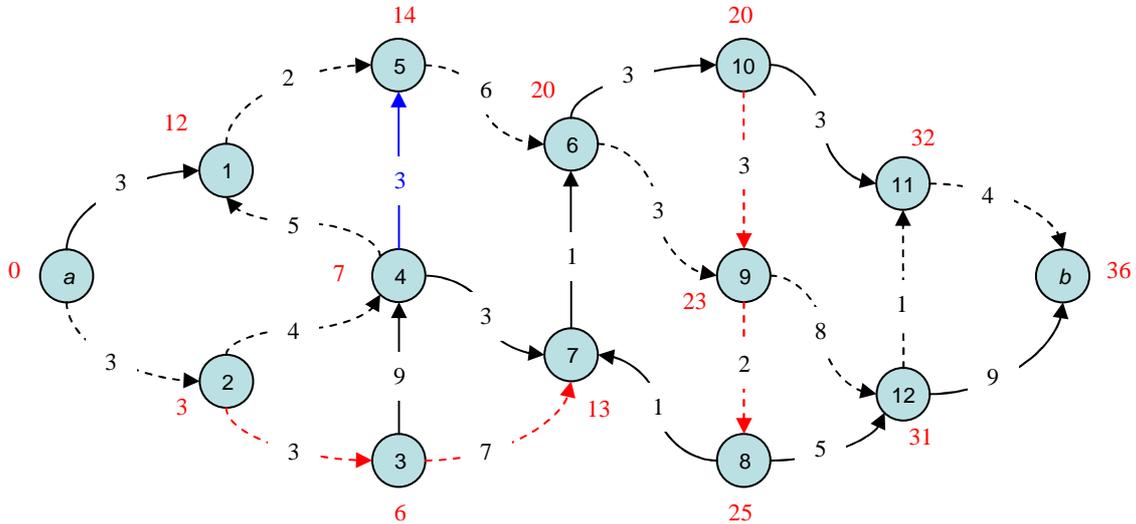


E mi sa che si è sbagliato, nel senso che ne esiste uno più breve. Verificate la mia affermazione

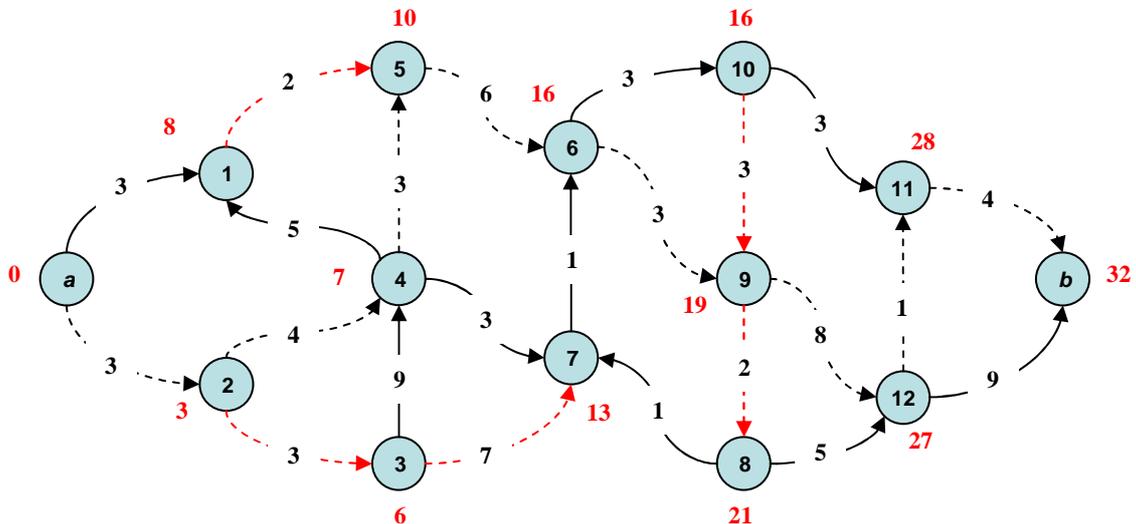
- 1) trovando una base associata alla soluzione del GPS
- 2) calcolandone i costi ridotti
- 3) calcolando una nuova base con un'operazione di pivot

La nuova base è degenerare?

Nella soluzione del GPS gli archi a tratteggio sono in base con valore 1; per completare la base possiamo aggiungerne, con valore 0, quanti ne servono per formare un albero ricoprente. Una possibilità è quella indicata in figura:



Gli archi aggiunti sono quelli in rosso; in rosso anche i potenziali ai nodi (quello al nodo b indica la distanza da a lungo l'itinerario scelto dal GPS). Dal calcolo dei costi ridotti si evince che, ad esempio, l'arco 45 (in azzurro) è candidato a entrare in base migliorandola: infatti il suo costo ridotto è $c_{45}' = c_{45} + y_4 - y_5 = 3 + 7 - 14 = -4 < 0$. Eseguendo l'aggiornamento si ottiene la soluzione di base di figura, di costo inferiore alla precedente. Tale soluzione, come la precedente, è comunque degenerare in quanto la base contiene archi fissati al valore di soglia.



RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 23 giugno 2011

GRUPPO B

1. Il vettore $w = (\frac{7}{3}, 0, \frac{1}{6})$ è combinazione **solamente conica** dei vettori

$$v_1 = (-\frac{1}{3}, 1, 0), \quad v_2 = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}), \quad v_3 = (0, -\frac{1}{12}, \frac{1}{2})$$

2. Ditelo con i fiori

Nel linguaggio dei fiori bisogna stare attenti. Tristano vuol dire a Isotta quanto l'ama e per farlo le vuol mandare un mazzo con anemoni, begonie e calle. Ma attenzione: gli anemoni devono essere in numero pari, le begonie esattamente il doppio delle calle, e le calle almeno la metà degli anemoni. Inoltre il mazzo dovrà contenere almeno 20 fiori. Quanto dovrà come minimo spendere per tutto questo il nostro eroe, bello ma povero, sapendo che i fiori in questione hanno i prezzi unitari riportati in tabella? Ditelo col metodo del simplesso indicando con a, b, c il numero di anemoni, begonie e calle da comprare.

<i>anemone</i>	<i>begonia</i>	<i>calla</i>
0,8	0,7	1,4

Il problema si può formulare impostando le seguenti condizioni

$a = 2k$	gli anemoni sono in numero pari
$b = 2c$	le begonie sono il doppio delle calle
$c \geq k$	le calle sono almeno la metà degli anemoni
$a + b + c \geq 20$	bisogna comprare almeno 20 fiori

L'obiettivo è

$$\min \quad 8a + 7b + 14c$$

e tutte le variabili sono non negative. Inoltre, almeno la variabile k dovrebbe essere intera. La tabella del problema ausiliario, utile a determinare una prima soluzione di base, si scrive (il terzo vincolo è stato scritto $k - c \leq 0$ e vi è stata associata la slack s):

a	b	c	k	s	w_1	w_2	w_3	
					1	1	1	
1		-2	-2		1			0
	1	-1	1	1		1		0
		1					1	0
1	1	1						20

e in forma canonica diventa:

a	b	c	k	s	w_1	w_2	w_3	
-2	-2	1	2					-20
1		-2	-2		1			0
	1	-1	1	1		1		0
		1					1	0
1	1	1						20

Eseguendo le operazioni di pivot necessarie a far uscire dalla base tutte le variabili ausiliarie si ottiene:

a	b	c	k	s	w_1	w_2	w_3	
	-2	1	-2		2			-20
1		-2	-2		1			0
	1	-2				1		0
		-1	1	1				0
	1	1	2		-1		1	20

a	b	c	k	s	w_1	w_2	w_3	
		-3	-2		2	2		-20
1		-2	-2		1			0
	1	-1	1	1		1		0
		3	2		-1	-1	1	20

a	b	c	k	s	w_1	w_2	w_3	
			-2		1	1	1	0
1			4/3		1			0
	1		5/3	1	-2/3	1/3	2/3	40/3
		1	2/3		-1/3	-1/3	1/3	20/3
					-1/3	-1/3	1/3	20/3

La soluzione di base ottenuta è $a = k = 0$, $b = 40/3$, $c = 40/3$. Eliminando le variabili ausiliarie e ripristinando la funzione obiettivo del problema originale si ha:

a	b	c	k	s	
8	7	14			0
1			-2		0
	1		4/3		40/3
			5/3	1	20/3
		1	2/3		20/3

Portando poi in forma canonica:

a	b	c	k	s	
			-8/3		-560/3
1			-2		0
	1		4/3		40/3
			5/3	1	20/3
		1	2/3		20/3

Con un pivot in colonna 4 e riga 3 si ottiene poi la soluzione ottima

a	b	c	k	s	
				8/5	-176
1				6/5	8
	1			-4/5	8
			1	3/5	4
		1		-2/5	4

Fortunatamente la soluzione è intera: 8 anemoni, 8 begonie e 4 calle. Il costo, riportato all'iniziale unità di misura, è di 17,6 euro.

3. Scrivete il duale del seguente problema: $\min 3x_1 - 6x_2$ $\max 8y_1 + 7y_3$
- $$\begin{aligned} -5x_2 - 9x_3 &\leq -8 & y_3 &= -\frac{1}{2} \\ -3x_2 - 6x_3 &= 0 & 5y_1 + 3y_2 &= -6 \\ 6x_1 - 7x_3 &\leq -7 & 9y_1 + 6y_2 + 7y_3 &\leq 0 \\ x_3 &\geq 0 & y_1, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$
4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato: $\min 2x_1 - x_2 + x_3$
- $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_2 - x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il valore minimo di z è -2 . In corrispondenza le variabili assumono i valori $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

5. Navigatore e poeta

Si veda la soluzione del Gruppo A.