RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 24 gennaio 2011

Washing machine

Don Vito tiene due picciotti: Mimì 'u Sindaco e Fefè 'u Cavallirizzu. Don Vito tiene anche un'età, ed è persona che ha a cuore la famiglia. L'azienda rende, ma – disse Totò 'u Raggiuniere – in questo paese fetuso non si può stare in pace coi cristiani e a posto con le carte: i due rami, "Contribuzioni Volontarie" e "Eventi Speciali", non sono insomma in grado di fatturare regolarmente. Bisogna provvedere, e Totò suggerisce di investirne le rendite in altre due attività alla luce del sole: "Palazzine", da intestare a Mimì, e "Benessere" da intestare a Fefè. Certo, mettere a posto le cose ha dei costi: tasse, contabilità, spese varie. Totò li ha stimati come segue: la tabella fornisce il costo sostenuto per ogni euro prodotto da uno dei rami e investito in una delle attività.

Costi di lavaggio		*Nuova attività*	
		Palazzine	*Benessere*
Ramo d'azienda	*Contribuzioni*	0,20	0,40
	Eventi	0,30	0,25

Ora, il ramo "Contribuzioni" genera annualmente un flusso di cassa di 1.740.000 euro, il ramo "Eventi" 2.610.000. Don Vito desidera che i proventi finali delle due attività siano il più possibile uguali, c'è da dubitare? E siccome è del '29, vuole che la differenza non superi 29.000 euro. Ma vuole anche indirizzare gli investimenti in modo da minimizzare i costi di lavaggio.

1. Formulate il problema come programmazione lineare e ponetelo in forma standard.

2. La soluzione proposta da Totò è: tutti i proventi del ramo "Contribuzioni" vanno su "Benessere", invece quelli del ramo "Eventi" si dividono, 2.050.000 su "Palazzine" e il resto su "Benessere". La soluzione è ammissibile? E' di base? E' degenere?

3. Don Vito sospetta che la soluzione proposta da Totò costi troppo, forse vuole farci la cresta. Ricorrendo al problema duale, calcolate i costi ridotti associati alla soluzione di Totò ed esprimete un giudizio sulla fondatezza dell'ipotesi di Don Vito.

4. Stabilite definitivamente la sorte di Totò risolvendo il problema duale con il metodo di Fourier-Motzkin (impostate solo i calcoli).

1. Il problema si può formulare scegliendo variabili di decisione $x_{ij} \geq 0$ che indicano le migliaia di euro investite dal ramo i nell'attività j. Indicando rami e attività con le relative iniziali i vincoli sul flusso di cassa si scrivono

$$x_{CP} + x_{CB} = 1740$$
$$x_{EP} + x_{EB} = 2610$$

e quelli di bilanciamento dei proventi sono

$$-0{,}80x_{CP} - 0{,}70x_{EP} + 0{,}60x_{CB} + 0{,}75x_{EB} \leq 29$$
$$0{,}80x_{CP} + 0{,}70x_{EP} - 0{,}60x_{CB} - 0{,}75x_{EB} \leq 29$$

L'obiettivo è minimizzare il costo sostenuto per il riciclaggio:

$$\min \quad 0{,}20x_{CP} + 0{,}30x_{EP} + 0{,}40x_{CB} + 0{,}25x_{EB}$$

In forma standard il problema ha sei variabili, due delle quali di slack. Eliminando i decimali e riportando i dati in una tabella:

x_{CP}	x_{EP}	x_{CB}	x_{EB}	s_1	s_2	
20	30	40	25	0	0	
1	0	1	0	0	0	1740
0	1	0	1	0	0	2610
80	70	–60	–75	1	0	2900
–80	–70	60	75	0	1	2900

2. La soluzione prospettata da Totò è $x_{CP} = 0$, $x_{EP} = 2050$, $x_{CB} = 1740$, $x_{EB} = 560$, $s_1 = 0$, $s_2 = 58$. Essa è ammissibile di base e non degenere in quanto soddisfa con il segno di uguaglianza i quattro vincoli non banali con altrettante variabili positive. La base determina le matrici

$$\mathbf{A}_B = \begin{array}{cccc} x_{EP} & x_{CB} & x_{EB} & s_1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 70 & -60 & -75 & 1 \\ -70 & 60 & 75 & 0 \end{array} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1740 \\ 2610 \\ 2900 \\ 2900 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2050 \\ 1740 \\ 560 \\ 58 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{array}{cc} x_{CP} & s_2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 80 & 0 \\ -80 & 1 \end{array}$$

3. Il duale del problema formulato ha la forma $\max\{\mathbf{yb}: \mathbf{yA} \leq \mathbf{c}\}$. Per annullare i costi ridotti in base, la soluzione duale corrispondente alla base trovata deve verificare $\mathbf{yA}_B = \mathbf{c}_B$. Il sistema, di quattro equazioni in quattro incognite, si scrive

$$\begin{aligned} y_2 + 70y_3 - 70y_4 &= 30 \\ y_1 - 60y_3 + 60y_4 &= 40 \\ y_2 - 75y_3 + 75y_4 &= 25 \\ y_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_2 - 70y_4 &= 30 \\ y_1 + 60y_4 &= 40 \\ y_2 + 75y_4 &= 25 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 30 + 70y_4 &= 25 - 75y_4 \\ &\Downarrow \\ y_4 = -{}^5/_{145} &= -{}^1/_{29} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 &= {}^{1220}/_{29} \\ y_2 &= {}^{800}/_{29} \end{aligned}$$

I costi ridotti associati alle variabili fuori base x_{CP} e s_2 valgono rispettivamente

$$c_{CP}' = c_{CP} - \mathbf{yA}_{CP} = 20 - y_1 - 80y_3 + 80y_4 = 20 - {}^{1220}/_{29} - {}^{80}/_{29} = -{}^{720}/_{29}$$

$$c_2' = c_2 - \mathbf{yA}_2 = 0 - y_4 = {}^1/_{29}$$

Dal valore del primo costo ridotto si deduce che la condizione sufficiente di ottimalità non è rispettata. Ciò suggerisce la possibilità di ridurre il costo corrente, che è di 145.100 euro. Questa possibilità va tuttavia dimostrata.

4. Il problema duale si scrive

$$\begin{aligned} \max \quad z &\leq 1740y_1 + 2610y_2 + 2900y_3 + 2900y_4 \\ y_1 \qquad + 80y_3 - 80y_4 &\leq 20 \\ y_2 + 70y_3 - 70y_4 &\leq 30 \\ y_1 \qquad - 60y_3 + 60y_4 &\leq 40 \\ y_2 - 75y_3 + 75y_4 &\leq 25 \\ y_3, y_4 &\leq 0 \end{aligned}$$

z	y_1	y_2	y_3	y_4	$\leq$
1	–174	–261	–290	–290	0
0	1	0	80	–80	20
0	0	1	70	–70	30
0	1	0	–60	60	40
0	0	1	–75	75	25
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0

z	y_1	y_2	y_3	y_4	$\leq$
1	0	–261	13630	–14210	3480
1	0	–261	–10730	10150	6960
0	0	1	70	–70	30
0	0	1	–75	75	25
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0

z	y_1	y_2	y_3	y_4	$\leq$
1	0	0	31900	–32480	11310
1	0	0	–5945	5365	10005
1	0	0	7540	–8120	14790
1	0	0	–30305	29725	13485
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0

Proseguendo, con pazienza infinita e che forse andrebbe spesa meglio, si ottiene che la soluzione ottima ha un costo di 101.900 euro. Povero Totò…