

RICERCA OPERATIVA
prova scritta del 10 gennaio 2011

1. Scrivere il duale del problema:

$$\begin{array}{llll}
 \min & 3x_1 + 4x_2 + x_3 & & \max & 2y_1 - 4y_2 + 5y_4 \\
 & 2x_1 + 2x_2 & \geq & 2 & 2y_1 + y_4 \leq 3 \\
 & x_2 & \leq & 4 & 2y_1 - y_2 + 3y_3 = 4 \\
 & 3x_2 + x_3 & \geq & 0 & y_3 - y_4 \leq 1 \\
 & x_1 - x_3 & = & 5 & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\
 & x_1, x_3 \geq 0 & & &
 \end{array}$$

2. Il vettore $w = (2, 2, 2)$ è combinazione **conica** dei vettori

$$v_1 = (4, 2, 2) \quad v_2 = (2, 4, 2) \quad v_3 = (2, 2, 4)$$

3. LCA

Non è una casa discografica cinese. E neppure una forma di assicurazione automobilistica cinese. LCA sta per “Life Cycle Assessment”: è una lodevole pratica che serve a valutare parametri diretti e indiretti (ad esempio, parametri economici come i costi o parametri tecnici come l’impatto ambientale) di un prodotto nell’arco dell’intero ciclo di vita, cioè dalla fabbricazione alla dismissione.

Prendiamo ad esempio una fabbrica di pannelli fotovoltaici monocristallini che produce e vende in Germania e Brasile. Volendo accedere a dei finanziamenti deve dimostrare che produzione, commercializzazione, uso e smaltimento dei propri prodotti causano una riduzione di CO₂ superiore a una data soglia. Per avere un quadro completo della situazione l’azienda deve quindi eseguire un LCA relativo a questo parametro: infatti la riduzione di CO₂ dipende da dove si produce, da dove si vende e dall’uso del pannello. La tabella che segue, ricavata da apposito studio, fornisce i kg di CO₂ emessi per kW trasportato in dipendenza del luogo di produzione e di utilizzo

Kg di CO ₂ emessi per kW trasportato		Luogo di utilizzo	
		Germania	Brasile
Luogo di produzione	Germania	52,9	230,1
	Brasile	95,4	158,7

D’altra parte, la produzione di pannelli fotovoltaici richiede la fusione di svariati minerali (silicio, alluminio ecc.). Quest’operazione comporta emissioni di CO₂ la cui entità dipende dalla località di produzione.

Kg di CO ₂ emessi per kW prodotto	
Luogo di produzione	Germania 3124,4
Brasile	758,4

Per l’anno corrente la fabbrica ha una richiesta di pannelli per 10 MW in Germania e 6,6 MW in Brasile. Gli impianti consentono di produrre 4 MW in Germania e 14 MW in Brasile in moduli da 1 kW. Ci si chiede come distribuire la produzione tra i due Paesi in modo da minimizzare le emissioni totali di CO₂. Formulare il problema come programmazione lineare e risolverlo col metodo del simplesso.

Il problema si può formulare scegliendo variabili di decisione $x_{ij} \geq 0$ che indicano i moduli da 1 kW prodotti nel luogo i e destinati al mercato j . Indicando con D la Germania e B il Brasile i vincoli di capacità produttiva si scrivono

$$x_{DD} + x_{DB} \leq 4000$$

$$x_{BB} + x_{BD} \leq 14000$$

e quelli di soddisfacimento della domanda sono

$$x_{DD} + x_{BD} = 10000$$

$$x_{BB} + x_{DB} = 6600$$

Le emissioni di CO₂ totali sommano quelle dovute al trasporto e quelle dovute alla produzione. L’obiettivo è quindi

$$\min (52,9 + 3124,4)x_{DD} + (158,7 + 758,4)x_{BB} + (95,4 + 758,4)x_{BD} + (230,1 + 3124,4)x_{DB}$$

Riportiamo i dati del problema in una tabella aggiungendo le variabili di slack associate ai vincoli di capacità

x_{DD}	x_{BB}	x_{BD}	x_{DB}	s_1	s_2	
3177,3	917,1	853,8	3354,5	0	0	
1			1	1		4000
	1	1			1	14000
1		1				10000
	1		1			6600

Per determinare una prima soluzione di base ammissibile aggiungiamo due ulteriori variabili w_1, w_2 e risolviamo il problema ausiliario $\min w_1 + w_2$

x_{DD}	x_{BB}	x_{BD}	x_{DB}	s_1	s_2	w_1	w_2	
0	0	0	0	0	0	1	1	0
1			1	1				4000
	1	1			1			14000
1		1				1		10000
	1		1				1	6600

La forma canonica si ottiene al solito sottraendo alla riga 0 le righe corrispondenti alle slack ausiliarie:

x_{DD}	x_{BB}	x_{BD}	x_{DB}	s_1	s_2	w_1	w_2	
-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	-16600
1			1	1				4000
	1	1			1			14000
1		1				1		10000
	1		1				1	6600

x_{DD}	x_{BB}	x_{BD}	x_{DB}	s_1	s_2	w_1	w_2	
0	-1	0	-1	0	0	1	0	-6600
1			1	1				4000
-1	1				1	-1		4000
1		1				1		10000
	1		1				1	6600

x_{DD}	x_{BB}	x_{BD}	x_{DB}	s_1	s_2	w_1	w_2	
-1	0	0	-1	0	1	0	0	-2600
1			1	1				4000
-1	1				1	-1		4000
1		1				1		10000
1			1		-1	1	1	2600

x_{DD}	x_{BB}	x_{BD}	x_{DB}	s_1	s_2	w_1	w_2	
0	0	0	0	0	0	1	1	0
				1	1	-1	-1	1400
	1		1				1	6600
		1	-1		1		-1	7400
1			1		-1	1	1	2600

La tabella iniziale del problema da risolvere è quindi

x_{DD}	x_{BB}	x_{BD}	x_{DB}	s_1	s_2	
3177,3	917,1	853,8	3354,5	0	0	0
	1		1	1	1	1400
		1	-1		1	7400
1			1		-1	2600

e può essere facilmente resa canonica sottraendo dalla riga 0 le righe 4, 2 e 3 moltiplicate rispettivamente per 3177,3, per 917,1 e per 853,8:

x_{DD}	x_{BB}	x_{BD}	x_{DB}	s_1	s_2	
0	0	0	113,8	0	2323,5	-20.631.960
	1		1	1	1	1400
		1	-1		1	6600
1			1		-1	7400
						2600

La tabella risulta ottima, in quanto i costi ridotti sono tutti ≥ 0 . La soluzione ottima consiste dunque nel produrre in totale 2600 moduli in Germania e 14000 in Brasile: di questi ultimi, 6600 destinati a uso interno e i rimanenti da esportare in Germania. Questa soluzione comporta l'emissione di oltre 20 tonnellate di CO₂ ⁽¹⁾.

¹ La cifra, apparentemente elevata, è in realtà ampiamente compensata dalla riduzione di CO₂ ottenuta sostituendo generatori di potenza più inquinanti. Il risultato netto, ovviamente, dipende dalla forma di generazione sostituita. Studi sembrano indicare che il miglior risultato, nell'arco di un ciclo di vita dei pannelli venticinquennale, si ottiene nell'uso autonomo in Brasile, con un risparmio di emissioni di circa 27 tonnellate di CO₂ per kW (nella ipotesi di domanda del nostro problema, 6600 kW, fanno circa 175.000 tonnellate): in quella regione infatti le elevate distanze richiedono l'uso di generatori diesel a uso privato, che risultano molto inquinanti e possono essere utilmente rimpiazzati da pannelli solari che beneficiano, tra l'altro, di una maggiore insolazione rispetto alle latitudini dell'Europa centro-settentrionale.