RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 27 settembre 2010

1. Scrivere il duale del seguente problema:

$$\begin{array}{rl} \min & 5x_1 - 3x_2 \\ & x_1 \qquad - 4x_3 \le -3 \\ & x_1 + 2x_2 \; - x_3 = 2 \\ & 5x_2 - 2x_3 \le -2 \\ & x_1 \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \max & 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ & -y_1 + y_2 \le 5 \\ & -2y_2 + 5y_3 = 3 \\ & 4y_1 - y_2 + 2y_3 = 0 \\ & y_1, y_3 \ge 0 \end{array}$$

2. Il vettore $\mathbf{w} = (^5/_2, -^3/_4, ^5/_2)$ è combinazione conica di $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, ½, 1)$ con coefficienti $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = ½$; poiché $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$, la combinazione non è convessa.

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato:

$$\begin{array}{rl} \min & 6x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & 2x_1 - 4x_2 + x_3 \ge 1 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \le 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	≥
1	–6	3	–1	0
0	2	–4	1	1
0	–1	1	1	–2
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

z	x_1	x_2	x_3	≥
1	–4	–1	0	1
1	–7	4	0	–2
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
1	–6	3	0	0

z	x_1	x_2	x_3	≥
5	–23	0	0	2
0	1	0	0	0
1	–4	0	0	1
4	–18	0	0	3

z	x_1	x_2	x_3	≥
5	0	0	0	2
1	0	0	0	1
4	0	0	0	3

Il valore minimo di z è $z^* = 1$. Sostituendolo nella penultima tabella si ricava $x_1 \le 0$, $x_1 \ge 0$, $23x_1 \le 3$, $18x_1 \le 1$, quindi $x_1^* = 0$; sostituendo nella terzultima si ha $x_2 \ge 0$, $x_2 \le 0$, $3x_2 \ge -1$, $4x_2 \ge -3$, quindi $x_2^* = 0$; infine con l'ultima sostituzione si ottiene $x_3^* = 1$.

4. Felini felici

Una società leader nella produzione di cibo per gatti ha deciso di lanciare sul mercato un nuovo prodotto, denominato Dieta Scientifica, in confezioni da 500 g. Il controllo di qualità ha imposto che in ogni confezione siano presenti almeno 150 g di proteine, 40 g di grassi e 30 g di fibre. Per la ottenere questo risultato, l'azienda intende miscelare tre componenti base. La Tabella che segue riporta il costo e il contenuto di principi nutritivi per 100 g dei tre componenti. Determinare la miscela ottimale che consente di minimizzare i costi rispettando i vincoli sulla qualità del prodotto.

	proteine	grassi	fibre	altro	costo
Componente 1	30	37	31	2	0,5
Componente 2	25	32	35	8	0,4
Componente 3	40	20	25	15	0,7

1) Formulate il problema in termini di programmazione lineare.
2) Usando il metodo del simplesso, dire se è possibile trovare una miscela che realizzi il prodotto a meno di 4,8 €/kg.

1) Si tratta di un problema di miscelazione. Sia x_i la percentuale di composto i contenuta in 100 g di Dieta Scientifica. Queste variabili soddisfano i vincoli

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Riferiti a 100 g di prodotto finale i vincoli sulla qualità si scrivono

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \ge {}^{150}/_5 = 30$$

$$37x_1 + 32x_2 + 20x_3 \ge {}^{40}/_5 = 8$$

$$31x_1 + 35x_2 + 25x_3 \;\geq\; {}^{30}/_5 \;=\; 6$$

L'obiettivo consiste nel minimizzare il costo di produzione di 1000 grammi di prodotto finale:

$$\min \quad 5x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

2) Per rispondere alla domanda possiamo applicare il Teorema di dualità debole, secondo il quale il valore di ciascuna soluzione primale domina quello di qualsiasi soluzione duale. Il valore di una generica soluzione duale rappresenta quindi un limite inferiore al costo del prodotto. Inoltre per il duale del problema in questione è più semplice determinare una forma canonica:

$$\begin{array}{lrl} \max & 30y_1 + 8y_2 + 6y_3 & \\ & 30y_1 + 37y_2 + 31y_3 + z & \leq 5 \\ & 25y_1 + 32y_2 + 35y_3 + z & \leq 4 \\ & 40y_1 + 20y_2 + 25y_3 + z & \leq 7 \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \end{array}$$

La variabile z non è vincolata in segno. Possiamo porre $z = z_1 - z_2$ con $z_1, z_2 \geq 0$, e scrivere la forma canonica:

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	w_1	w_2	w_3	
30	8	6	0	0	0	0	0	0
30	37	31	1	–1	1	0	0	5
25	32	35	1	–1	0	1	0	4
40	20	25	1	–1	0	0	1	7

Con un pivot in riga 2 e colonna 1 si ha

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	w_1	w_2	w_3	
0	$-{}^{152}/_5$	–36	$-{}^{6}/_5$	${}^{6}/_5$	0	$-{}^{6}/_5$	0	$-{}^{24}/_5$
0	$-{}^{7}/_5$	–11	$-{}^{1}/_5$	${}^{1}/_5$	1	$-{}^{6}/_5$	0	${}^{1}/_5$
1	${}^{32}/_{25}$	${}^{7}/_5$	${}^{1}/_{25}$	$-{}^{1}/_{25}$	0	${}^{1}/_{25}$	0	${}^{4}/_{25}$
0	$-{}^{156}/_5$	–31	$-{}^{3}/_5$	${}^{3}/_5$	0	$-{}^{8}/_5$	1	${}^{3}/_5$

La soluzione trovata vale ${}^{24}/_5$, cioè proprio 4,8. Quindi nessuna soluzione primale può costare meno di 4,8€/kg.

5. Dow Jones

Il più celebre indice di borsa è formato da un insieme di titoli il cui valore riproduce – in un certo senso – quello della borsa di New York. Come si può progettare un indice del genere? Immaginate di avere un insieme S di titoli, e indicate con d_{ij} un numero (detto distanza) che esprime la "similarità" dei titoli i e j (cioè, gli andamenti dei due titoli in un periodo dato sono tanto più simili quanto minore è il valore di d_{ij}: in particolare, $d_{ii} = 0$ per ogni $i \in S$). Bene: il Dow Jones può costruirsi a partire da un campione limitato di titoli rappresentanti. Qual è il miglior campione che possiamo scegliere? Diciamo quello che ne minimizza la distanza totale dai titoli di S. Precisamente, detto $C \subseteq S$ il campione, questa distanza si scrive

$$d(C, S) \;=\; \Sigma_{i \in C} \Sigma_{j \in S}\, d_{ij}$$

Formulate come programmazione lineare 0-1 il problema di determinare un campione ottimo $C^* \subseteq S$ contenente esattamente p titoli che rappresentino tutti i titoli di S.

Il problema – detto della p-mediana – si formula introducendo due tipi di variabili binarie:

$x_i = 1$ se il titolo i viene inserito nel campione C, 0 altrimenti;

$x_{ij} = 1$ se il titolo i viene scelto per rappresentare il titolo j, 0 altrimenti.

In altre parole (x_i) è il vettore caratteristico del campione C. Richiedere che C contenga esattamente p titoli corrisponde a vincolare le x_i come segue:

$$\sum_{i \in S} x_i = p$$

Tutti i titoli di S devono avere un rappresentante, quindi le x_{ij} devono rispettare vincoli di assegnamento:

$$\sum_{j \in S} x_{ij} = 1 \qquad \text{per ogni } i \in S$$

D'altro canto, se il titolo j è rappresentato dal titolo i, il titolo i deve appartenere al campione: ciò richiede il rispetto di vincoli di attivazione e delle clausole elementari:

$$x_{ij} \leq x_i$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{per ogni } i \in S, j \in S$$

L'obiettivo consiste nel minimizzare la distanza $d(C, S)$:

$$\min \quad d(C, S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} d_{ij} x_i$$

RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 27 settembre 2010

1. Scrivere il duale del seguente problema:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - 5x_2 \\ & x_2 - 4x_3 \le -3 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & 5x_1 - 2x_3 \le -2 \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ & 2y_2 - 5y_3 = 3 \\ & y_1 - y_2 \ge 5 \\ & 4y_1 - y_2 + 2y_3 = 0 \\ & y_1, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

2. Il vettore $\mathbf{w} = (^7/_3, -^2/_3, ^7/_3)$ è combinazione conica di $\mathbf{v}_1 = (3, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, ^1/_3, 1)$ con coefficienti $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = ^1/_3$; poiché $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ne 1$, la combinazione non è convessa.

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato:

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ & 2x_1 - 4x_2 \ge 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

z	x_1	x_2	x_3	≥
–1	2	1	–2	0
0	–3	–1	1	–2
0	2	–4	0	3
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

z	x_1	x_2	x_3	≥
–1	–4	–1	0	–4
–1	2	1	0	0
0	2	–4	0	3
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

z	x_1	x_2	x_3	≥
–3	0	1	0	–4
–1	0	–9	0	2
–1	0	–1	0	–4
0	0	1	0	0

z	x_1	x_2	x_3	≥
–28	0	0	0	–34
–4	0	0	0	–8
–1	0	0	0	2
–1	0	0	0	–4

Il valore massimo di z è $z^* = -2$. Sostituendolo nella penultima tabella si ricava $x_2 \le 0$, $x_2 \ge 0$, $x_2 \ge -10$, $x_2 \le 6$, quindi $x_2^* = 0$; sostituendo nella terzultima si ha $4x_1 \le 6$, $x_1 \ge -1$, $2x_1 \ge 3$, $x_1 \ge 0$, quindi $x_1^* = ^3/_2$; infine con l'ultima sostituzione si ottiene $x_3^* = ^5/_2$.

4. Felini felici

Vedi gruppo A.

5. Dow Jones

Vedi gruppo A.