RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 13 settembre 2010

1. Scrivere il duale del seguente problema:

$$\begin{array}{lrcl} \min & -4x_1 + x_2 & & \\ & 4x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 19 \\ & 10x_2 - 4x_3 & \leq & 25 \\ & 9x_1 \quad\quad - x_3 & = & 7 \\ & x_1, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & 19y_1 - 25y_2 + 7y_3 & & \\ & 4y_1 \quad\quad + 9y_3 & \leq & -4 \\ & 2y_1 - 10y_2 & = & 1 \\ & -y_1 + 4y_2 - y_3 & \leq & 0 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

2. Il vettore $\mathbf{w} = (^3/_2, {}^3/_4, {}^1/_6)$ è combinazione convessa di $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 0, {}^1/_2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, {}^1/_2, {}^1/_3)$.

3. Utilizzando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema:

$$\begin{array}{lrcl} \max & 2x_1 - x_2 + x_3 & & \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ & -2x_2 + 3x_3 & \geq & 2 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\leq$
1	–2	1	–1	0
0	1	1	1	1
0	0	2	–3	–2
0	–1	0	0	0
0	0	–1	0	0
0	0	0	–1	0

z	x_2	x_3	$\leq$
1	3	1	2
0	1	1	1
0	2	–3	–2
0	–1	0	0
0	0	–1	0

z	x_3	$\leq$
1	1	2
0	1	1
0	–3	–2
0	–1	0

z	$\leq$
1	2
0	1
3	4
0	1

Il valore massimo di z è $z^* = {}^4/_3$. Sostituendolo nella penultima tabella si ricava $x_3 \leq {}^2/_3$, $x_3 \leq 1$, $3x_3 \geq 2$, $x_3 \geq 0$, quindi $x_3^* = {}^2/_3$; sostituendo nella terzultima si ha $3x_2 \leq 0$, $x_2 \leq {}^1/_3$, $2x_2 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, quindi $x_2^* = 0$; infine con l'ultima sostituzione si ottiene $x_1^* = {}^1/_3$.

4. Rifondiamo la Nazionale

La Nazionale italiana è da rifare, e il nuovo CT ha avviato i contatti con le società della Lega Calcio per discutere le condizioni di utilizzo dei giocatori. Per la prima amichevole di calendario il commissario chiede un contributo alle quattro squadre più importanti: servono 2 portieri, 5 difensori, 6 centrocampisti e 4 attaccanti. Le quattro squadre sono però disposte a fornire un numero di titolari non superiore a quanto indicato nella tabella di sinistra. D'altra parte, a ogni ruolo il CT attribuisce un punteggio in dipendenza della squadra di provenienza: tale punteggio lo trovate nella tabella di destra.

squadra/ruolo	A	B	C	D
Portiere	1	0	1	1
Difensore	2	2	0	3
Centrocampista	3	2	2	1
Attaccante	0	2	3	1

A	B	C	D
4	4	2	1
5	2	1	6
1	2	3	4
3	3	4	1

1) Formulate come flusso ottimo su un'opportuna rete il problema di determinare una soluzione che massimizzi il punteggio complessivo.
2) Determinate quindi una soluzione ottima utilizzando il metodo del simplesso su reti.

1) La rete conterrà un nodo per ogni squadra e uno per ogni ruolo. Questi ultimi nodi avranno domanda d_i pari al numero di giocatori necessari per ciascun ruolo. La rete è completata da archi che congiungono ogni nodo-squadra a ogni nodo-ruolo: questi archi hanno soglia nulla, capacità u_{ij} pari ai valori riportati nella prima tabella e costi c_{ij} pari ai valori riportati nella seconda cambiati di segno. Il problema consiste nel soddisfare la domanda con una distribuzione di flusso $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}$ che rispetti le capacità e abbia costo minimo. Per rispettare la condizione che la domanda complessiva (intesa in senso algebrico) abbia valore nullo occorre aggiungere un nodo sorgente s, collegato a tutti i nodi-squadra, che esprime una domanda $d_s = -\sum d_i = -17$.

2) Prima di tutto occorre verificare che il problema ammette soluzione. Facilmente, i due portieri si possono fornire col flusso $x_{Ap} = x_{Cp} = 1$, i cinque difensori con $x_{Bd} = 2$, $x_{Dd} = 3$, i sei centrocampisti con $x_{Ac} = x_{Bc} = x_{Cc} = 2$ e infine i quattro attaccanti con $x_{Ca} = 3$, $x_{Da} = 1$. Questa soluzione satura tutti gli archi tranne *Ac* (vedi tabella di sinistra) e totalizza un gradimento pari a $4·1 + 2·1 + 2·2 + 6·2 + 1·2 + 2·2 + 3·2 + 4·3 + 1·1 = 47$ (vedi tabella di destra).

squadra/ruolo	A	B	C	D		A	B	C	D
Portiere	1/1	0/0	1/1	0/1	2	4	4	2	1
Difensore	0/2	2/2	0/0	3/3	5	5	2	1	6
Centrocampista	2/3	2/2	2/2	0/1	6	1	2	3	4
Attaccante	0/0	0/2	3/3	1/1	4	3	3	4	1

La soluzione (di base ma fortemente degenere) ha 9 archi con flusso > 0. Per procedere come di consueto con il metodo del simplesso su reti bisogna prima costruire con questi archi un albero ricoprente: si possono scegliere ad esempio gli archi *Ap*, *Cp*, *Cc*, *Bd*, *Dd*, *Da* insieme a *sA* e *sB*. Successivamente si devono calcolare i potenziali associati ai nodi, e quindi i costi ridotti utilizzando la formula $c_{ij}' = c_{ij} + y_i - y_j$. Determinato quindi (se esiste) un arco fuori base con costo ridotto favorevole, si esegue un'operazione di pivot e si itera il procedimento.

5. Calcio mercato

Reduce da una brutta sconfitta, la dirigenza di una squadra di serie A decide di ricorrere in extremis al mercato. I giocatori cedibili e quelli acquisibili hanno valutazioni note: sia q_i la valutazione del giocatore i. Ciascun giocatore è inoltre accompagnato da un indice g_i che indica il gradimento da parte del mister. I giocatori sono distinti per ruolo: servono p portieri, d difensori, c centrocampisti e a attaccanti, e siano rispettivamente P^+, D^+, C^+ e A^+ (P^-, D^-, C^- e A^-) gli insiemi dei giocatori acquisibili (cedibili) in ciascuno dei ruoli suddetti.

Indichiamo con x_i una variabile 0-1 che assume valore 1 se e solo se il giocatore i viene acquistato (se acquisibile) o ceduto (se cedibile). Usando tali variabili formulate il problema di condurre la campagna acquisti, nel rispetto delle necessità della squadra e di un budget B prefissato, massimizzando il gradimento complessivo del mister. Come può scriversi un vincolo che rappresenti l'incompatibilità in squadra del generico giocatore i col generico giocatore j?

Posto $S^+ = P^+ \cup D^+ \cup C^+ \cup A^+$ e $S^- = P^- \cup D^- \cup C^- \cup A^-$ e utilizzando la notazione suggerita nel test il problema si formula

$$
\begin{array}{llll}
\max & \sum_{i\in S^+} g_i x_i & & \\
 & \sum_{i\in S^+} q_i x_i - \sum_{i\in S^-} q_i x_i & \le B & \text{vincolo di bilancio} \\
 & \sum_{i\in P^+} x_i - \sum_{i\in P^-} x_i & \ge p & \text{minimo numero di portieri} \\
 & \sum_{i\in D^+} x_i - \sum_{i\in D^-} x_i & \ge d & \text{minimo numero di difensori} \\
 & \sum_{i\in C^+} x_i - \sum_{i\in C^-} x_i & \ge c & \text{minimo numero di centrocampisti} \\
 & \sum_{i\in A^+} x_i - \sum_{i\in A^-} x_i & \ge a & \text{minimo numero di attaccanti} \\
 & x_i \in \{0, 1\} & i\in S^+\cup S^- & \text{clausole}
\end{array}
$$

Un eventuale vincolo di incompatibilità tra il giocatore i e il giocatore j si esprime con $x_i + x_j \le 1$ se i e j sono entrambi in S^+ (non li possiamo acquistare entrambi) con $x_i + x_j \ge 1$ se sono entrambi in S^- (almeno uno va ceduto) e con $x_i = x_j$ se uno appartiene a S^+ e l'altro a S^- (se acquisto uno devo cedere l'altro).

RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 31 settembre 2010

1. Scrivere il duale del seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 \qquad - 2x_3 \\ & x_1 - 5x_2 \geq 10 \\ & x_2 + 2x_3 = 5 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 10y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ & y_1 \qquad - y_3 \leq -2 \\ & -5y_1 + y_2 + y_3 \leq 0 \\ & 2y_2 - 2y_3 = -2 \\ & y_1, y_3 \geq 0 \end{array}$$

2. Il vettore $\mathbf{w} = (^5/_{12}, -^3/_4, ^1/_2)$ è combinazione convessa di $\mathbf{v}_1 = (0, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (^1/_2, -2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (^1/_3, ^1/_2, 1)$.

3. Utilizzando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema:

$$\begin{array}{ll} \min & 5x_1 - x_2 - x_3 \\ & 10\,x_1 - 2\,x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\leq$
-1	5	-1	-1	0
0	-10	2	0	-2
0	1	1	3	1
0	-1	0	0	0
0	0	-1	0	0
0	0	0	-1	0

z	x_1	x_2	$\leq$
-3	16	-2	1
0	-10	2	-2
0	1	1	1
0	-1	0	0
0	0	-1	0

z	x_1	$\leq$
-3	6	-1
0	-10	-2
-3	18	3
0	1	1
0	-1	0

z	$\leq$
-5	$-^{11}/_3$
-3	-1
-3	$-^3/_5$
-3	3
0	8
0	1

Il valore minimo di z è $z^* = {}^{11}/_{15}$. Sostituendolo nella penultima tabella si ricava $x_1 \leq {}^6/_5$, $x_1 \geq {}^1/_5$, $x_1 \leq {}^{26}/_{15}$, $x_1 \leq 1$, quindi si può scegliere $x_1^* = {}^1/_5$; sostituendo nella terzultima si ha $x_2 \geq -½$, $x_2 \leq 0$, $x_2 \leq {}^4/_5$, $x_2 \geq 0$, quindi $x_2^* = 0$; infine con l'ultima sostituzione si ottiene $x_3^* = {}^4/_{15}$.

4. Rifondiamo la Nazionale

Vedi gruppo A.

5. Calcio mercato

Vedi gruppo A.