RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 21 luglio 2010

1. Dato il problema di programmazione lineare

$$
\text{P)}\quad \begin{array}{ll} \min & z = 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ll} \max & y_1 + 2y_2 \\ & -2y_1 + 3y_2 \leq 6 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 8 \\ & y_1 - y_2 \leq 5 \\ & y_2 \geq 0 \end{array}
$$

a) costruirne il duale D; *b*) risolvere graficamente D; *c*) dire se P ammette soluzione ottima, e in caso affermativo determinarne il valore.

Disegnando la regione ammissibile del problema D e il vettore associato ai coefficienti della funzione obiettivo, si ottiene la soluzione ottima $\mathbf{y}^* = ({}^9/_4, {}^7/_2)$, di valore ${}^{37}/_4$. Tale è dunque il valore della soluzione ottima di P.

2. Il vettore $\mathbf{w} = (3, 0, 0)$ è combinazione conica e non affine di $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, -2, -3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 2)$, ottenuta con coefficienti ½, 1, ${}^3/_2$.

3. Utilizzando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema

$$
\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}
$$

z	x_1	x_2	x_3	$\geq$
1	–1	–1	–1	0
0	0	1	–3	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

z	x_2	x_3	$\geq$
1	0	–1	1
1	–1	–1	0
0	1	–3	1
0	1	0	0
0	0	1	0

z	x_3	$\geq$
1	–1	1
1	–4	1
1	–1	0
0	1	0

z	$\geq$
1	1
1	1
1	0

Il valore minimo di z è $z^* = 1$. Sostituendolo nella penultima tabella si ricava $x_3 \leq 0$, $4x_3 \leq 0$, $x_3 \leq 1$, $x_3 \geq 0$, quindi $x_3^* = 0$; sostituendo nella terzultima si ha $x_2 \leq 1$, $x_2 \geq 1$, $x_2 \geq 0$, quindi $x_2^* = 1$; infine con l'ultima sostituzione si ottiene $x_1 \leq 0$, $x_1 \geq 0$: pertanto $x_1^* = 0$.

4. Determinare con il metodo del simplesso una soluzione ammissibile del problema seguente e, in caso esista, stabilire se è ottima oppure no:

$$
\begin{array}{ll} \min & -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \\ & 5x_1 + x_2 + 2x_4 = 15 \\ & x_1 + 3x_3 + x_4 = 20 \\ & 5x_1 + 8x_2 = 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}
$$

Per trovare una soluzione ammissibile scriviamo il problema ausiliario:

$$
\begin{array}{ll} \min & z_1 + z_2 \\ & 5x_1 + x_2 + 2x_4 + z_1 = 15 \\ & x_1 + 3x_3 + x_4 = 20 \\ & 5x_1 + 8x_2 + z_2 = 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2 \geq 0 \end{array}
$$

Non occorre introdurre una terza variabile ausiliaria: è sufficiente dividere il secondo vincolo per 3 e assumere in base la variabile x_3.

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
0	0	0	0	1	1	0
5	1	0	2	1	0	15
${}^1/_3$	0	1	${}^1/_3$	0	0	${}^{20}/_3$
5	8	0	0	0	1	40

La tabella canonica si scrive immediatamente sottraendo le righe 1 e 3 alla riga 0:

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
-10	-9	0	-2	0	0	-55
5	1	0	2	1	0	15
$^{1}/_{3}$	0	1	$^{1}/_{3}$	0	0	$^{20}/_{3}$
5	8	0	0	0	1	40

Il criterio di ottimalità non è soddisfatto. Facendo entrare x_1 in base si ottiene

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
0	-7	0	2	2	0	-25
1	$^{1}/_{5}$	0	$^{2}/_{5}$	$^{1}/_{5}$	0	3
0	$-^{1}/_{15}$	1	$^{1}/_{5}$	$-^{1}/_{15}$	0	$^{17}/_{3}$
0	7	0	-2	-1	1	25

Facendo ora entrare in base x_2 si ha

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	$^{16}/_{35}$	$^{6}/_{35}$	$-^{1}/_{35}$	$^{16}/_{7}$
0	0	1	$^{19}/_{105}$	$-^{8}/_{105}$	$-^{1}/_{105}$	$^{124}/_{21}$
0	1	0	$-^{2}/_{7}$	$-^{1}/_{7}$	$^{1}/_{7}$	$^{25}/_{7}$

Questa tabella fornisce una prima soluzione di base per il problema originale:

x_1	x_2	x_3	x_4	
-1	3	4	-2	0
1	0	0	$^{16}/_{35}$	$^{16}/_{7}$
0	0	1	$^{19}/_{105}$	$^{124}/_{21}$
0	1	0	$-^{2}/_{7}$	$^{25}/_{7}$

Per rendere canonica la tabella bisogna sommare alla riga 0 la riga 1 e sottrarle le righe 2 e 3 moltiplicate, rispettivamente, per 4 e 3. Si ricava:

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	0	$-^{148}/_{105}$	$-^{673}/_{21}$
1	0	0	$^{16}/_{35}$	$^{16}/_{7}$
0	0	1	$^{19}/_{105}$	$^{124}/_{21}$
0	1	0	$-^{2}/_{7}$	$^{25}/_{7}$

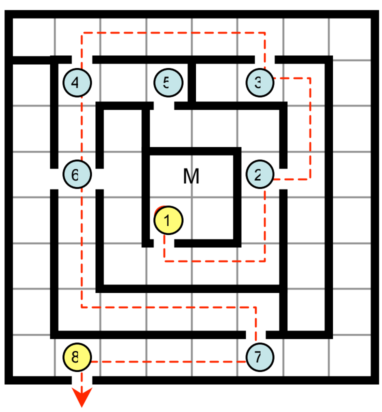
Il criterio di ottimalità non è soddisfatto e la soluzione trovata potrebbe non essere ottima. Per verificare, facciamo entrare x_4 in base e calcoliamo il nuovo valore della funzione obiettivo:

x_1	x_2	x_3	x_4	
$^{37}/_{12}$	0	0	0	$-^{525}/_{21}$
$^{35}/_{16}$	0	0	1	5
0	0	1	$^{19}/_{105}$	$^{124}/_{21}$
0	1	0	$-^{2}/_{7}$	$^{25}/_{7}$

La funzione obiettivo passa da $z = {}^{673}/_{21}$ a $z = {}^{525}/_{21} = 25$. La base precedente non era dunque ottima. Completando le operazioni di pivot si ottiene la soluzione $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 5$ (ottima, poiché tutte le componenti della riga 0 sono ≥ 0).

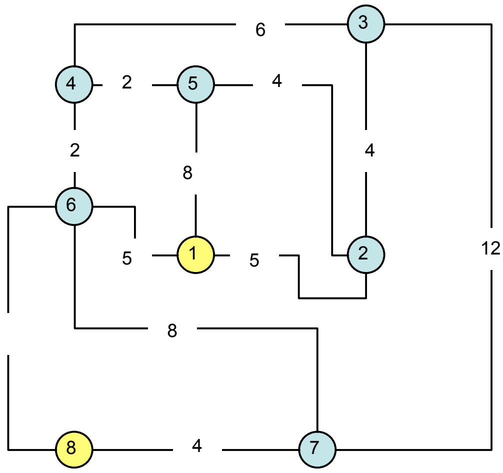
5. Il filo di Arianna

E' nota la leggenda di Teseo che per uccidere il Minotauro si recò nel labirinto di Cnosso, e ne poté uscire seguendo a ritroso il filo che Arianna gli aveva donato e che lui aveva legato all'ingresso. Icaro, che si trovava a svolazzare di lì, vide la scena dall'alto e commentò: "Ingegnoso, però la via più breve per uscire era un'altra". Aveva ragione o torto?

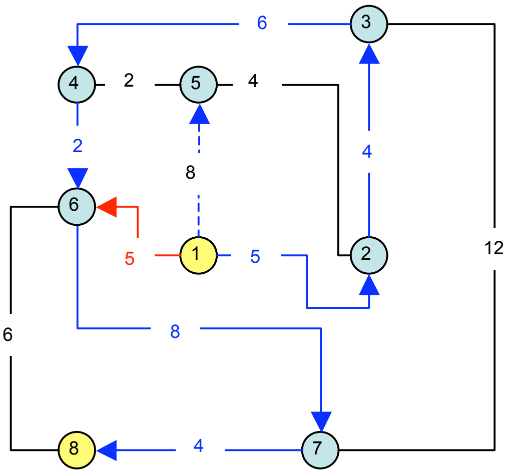


Rispondete formulando un problema di programmazione lineare ed eseguendo un pivot con il simplesso su reti.
Suggerimento. Usate un grafo opportunamente pesato; ovviamente è inutile definire un nodo per ogni quadratino, ne basta uno per ogni quadratino con una porta (ad es. quelli indicati in figura).

Il grafo può essere quello rappresentato in figura. I pesi sugli archi contano il numero di quadratini da percorrere per andare da una porta all'altra. Ovviamente i quadratini con porta sono di più, perché ogni porta ha due lati: ma quelli rappresentati sono sufficienti.



Il problema consiste nel trovare un (1, 8)-cammino di peso minimo. Costruiamo una soluzione di base a partire dal cammino indicato nel testo del problema (archi blu a tratto pieno) aggiungendovi archi (blu a tratteggio) in modo tale da formare un albero ricoprente B. La soluzione iniziale ha costo 29.



Attribuendo un potenziale arbitrario $y_1 = 0$ al nodo 1, calcoliamo i potenziali degli altri nodi ricorrendo alla formula $y_j = c_{ij} + y_i$. Si ricava in successione $y_2 = 5$, $y_5 = 8$, $y_3 = 9$, $y_4 = 15$, $y_6 = 17$, $y_7 = 25$, $y_8 = 29$. I costi ridotti degli archi si calcolano con la formula $c_{ij}' = c_{ij} + y_i - y_j$. Trattandosi di un problema di minimo privo di capacità, converrà far entrare in base una variabile x_{ij} con costo ridotto $c_{ij}' < 0$. Notiamo che il grafo è simmetrico e per ogni arco $ij \in B$ si ha che $ji \notin B$. Il costo ridotto per questi archi è dato da $c_{ji}' = c_{ji} + y_j - y_i$, ma siccome $c_{ji} = c_{ij} = y_j - y_i$, si ha $c_{ji}' = y_j - y_i + y_j - y_i = 2(y_j - y_i)$. Nel nostro caso y_j è sempre maggiore di y_i per tutti gli archi $ij \in B$: quindi tutti gli archi ji hanno costo ridotto positivo e non possono entrare in base con vantaggio. Calcoliamo i costi ridotti per gli archi rimanenti (quelli neri).

$$c_{16}' = c_{16} + y_1 - y_6 = 5 + 0 - 17 = -12 \qquad c_{61}' = c_{61} + y_6 - y_1 = 5 + 17 - 0 = +22$$
$$c_{24}' = c_{24} + y_2 - y_4 = 4 + 5 - 15 = -6 \qquad c_{42}' = c_{42} + y_4 - y_2 = 4 + 15 - 5 = +14$$
$$c_{37}' = c_{37} + y_3 - y_7 = 12 + 9 - 25 = -4 \qquad c_{73}' = c_{73} + y_7 - y_3 = 12 + 25 - 9 = +28$$
$$c_{45}' = c_{45} + y_4 - y_5 = 2 + 15 - 8 = +9 \qquad c_{54}' = c_{54} + y_5 - y_4 = 2 + 8 - 17 = -7$$
$$c_{68}' = c_{68} + y_6 - y_8 = 6 + 17 - 29 = -6 \qquad c_{86}' = c_{86} + y_8 - y_6 = 6 + 29 - 17 = +18$$

La variabile più favorevole corrisponde all'arco 16 (in rosso nella figura). Facendola entrare in base si ottiene $x_{16} = 1$ e $x_{12} = x_{13} = x_{34} = x_{46} = 0$. La nuova base definisce un cammino di lunghezza 17, più breve quindi del precedente.

RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 21 luglio 2010

1. Dato il problema di programmazione lineare P)

$$\begin{array}{llrl} \max & z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 & & \\ & 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 & \leq & 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \geq & 2 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llrl} \min & y_1 - 2y_2 & & \\ & 3y_1 - 2y_2 & \geq & 4 \\ & 2y_1 - 3y_2 & \geq & 6 \\ & y_1 & \leq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) costruirne il duale D; *b*) risolvere graficamente D; *c*) dire se P ammette soluzione ottima, e in caso affermativo determinarne il valore.

Disegnando la regione ammissibile del duale e il vettore associato ai coefficienti della funzione obiettivo, si verifica che D non ammette soluzione. Nulla si può dedurre per P, ma si osserva che soluzioni della forma $(0, \lambda, \lambda)$ risultano sempre ammissibili per $\lambda \geq {}^{2}/_{3}$ e hanno valore $z = 4\lambda$. Dunque P è illimitato.

2. Il vettore $\mathbf{w} = (5, 4, 6)$ è combinazione affine e non conica di $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, -2, -3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 2)$, ottenuta con coefficienti ½, –1, ${}^{3}/_{2}$.

3. Utilizzando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\leq$
1	–1	–1	–2	0
0	1	1	0	4
0	0	1	2	4
0	–1	0	0	0
0	0	–1	0	0
0	0	0	–1	0

z	x_2	x_3	$\leq$
1	0	–2	4
0	1	2	4
0	1	0	4
0	–1	0	0
0	0	–1	0

z	x_3	$\leq$
1	–2	4
0	2	4
0	0	4
0	–1	0

z	$\leq$
1	8
0	4
0	0

Il valore massimo di z è $z^* = 8$. Sostituendolo nella penultima tabella si ricava $x_3 \leq 2$, $2x_3 \geq 4$, $x_3 \geq 0$, quindi $x_3^* = 2$; sostituendo nella terzultima si ha $x_2 \leq 0$, $x_2 \leq 4$, $x_2 \geq 0$, quindi $x_2^* = 0$; con l'ultima sostituzione si ottiene infine $x_1 \geq 4$, $x_1 \leq 4$, $x_1 \geq 0$: pertanto $x_1^* = 4$.

4. Determinare con il metodo del simplesso il valore della funzione obiettivo in corrispondenza a una soluzione ottima del problema seguente (qualora esista):

$$\begin{array}{lll} \max & 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = 20 \\ & x_1 + x_3 + x_4 & = 25 \\ & 2x_1 + 5x_2 & = 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Per trovare una soluzione ammissibile scriviamo il problema ausiliario:

$$\begin{array}{lll} \min & z_1 + z_2 & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + z_1 & = 20 \\ & x_1 + x_3 + x_4 & = 25 \\ & 2x_1 + 5x_2 + z_2 & = 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2 & \geq 0 \end{array}$$

La tabella canonica si scrive immediatamente sottraendo le righe 1 e 3 alla riga 0:

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
0	0	0	0	1	1	0
2	2	1	0	1	0	20
1	0	1	1	0	0	25
2	5	0	0	0	1	40

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
–4	–7	–1	0	0	0	–60
2	2	1	0	1	0	20
1	0	1	1	0	0	25
2	5	0	0	0	1	40

Il criterio di ottimalità non è soddisfatto. Facendo entrare x_2 in base si ottiene

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
$-6/5$	0	–1	0	0	$7/5$	–4
$6/5$	0	1	0	1	$-2/5$	4
1	0	1	1	0	0	25
$2/5$	1	0	0	0	$1/5$	8

Facendo ora entrare in base x_1 si ha

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
0	0	0	0	1	1	0
1	0	$5/6$	0	$5/6$	$-1/3$	$20/6$
0	0	$1/6$	1	$-5/6$	$1/3$	$65/3$
0	1	$-1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	$20/3$

Questa tabella fornisce una prima soluzione di base per il problema originale:

x_1	x_2	x_3	x_4	
6	3	4	6	0
1	0	$5/6$	0	$20/6$
0	0	$1/6$	1	$65/3$
0	1	$-1/3$	0	$20/3$

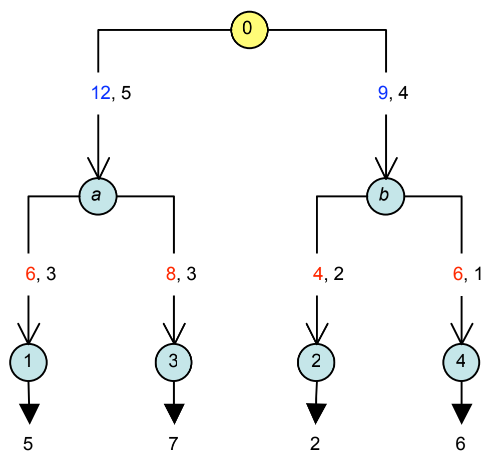
Per rendere canonica la tabella bisogna moltiplicare le righe 1 e 2 per –6, la riga 3 per –3, e sommarle alla riga 0. Si ricava:

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	–1	0	–170
1	0	$5/6$	0	$20/6$
0	0	$1/6$	1	$65/3$
0	1	$-1/3$	0	$20/3$

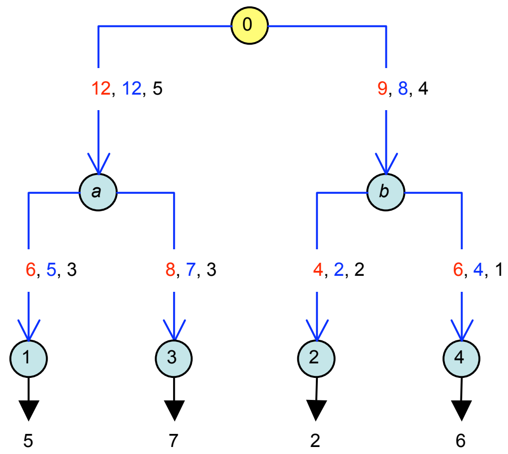
Il criterio di ottimalità è soddisfatto. Il problema ammette soluzione ottima di valore $z^* = 170$.

5. Authority

La figura riporta una rete di distribuzione *single-commodity*. La rete è proprietà della Società X, fino a oggi monopolista, ma l'Autorità per la Concorrenza ha autorizzato altre società alla realizzazione di tronchi di rete che connettano i nodi a, b tra di loro oppure a ai terminali pari e b a quelli dispari. I valori numerici associati a questi ultimi rappresentano la domanda dei terminali in un anno. Il primo valore associato a ciascuna tratta della rete rappresenta la capacità della tratta, il secondo rappresenta il prezzo che ciascun cliente paga a X per il trasferimento di un'unità di flusso lungo la tratta. La società Y intende valutare la convenienza a realizzare un nuovo tronco. Calcolate il massimo valore c del prezzo che Y può pensare di far pagare per il trasferimento di un'unità di flusso su ciascun tronco in progetto in modo che i clienti trovino convenienza a usarlo.



Con i dati a disposizione si ha immediatamente una soluzione di base corrispondente all'albero B rappresentato in figura dagli archi blu. Il terzo numero, anch'esso in blu, è il flusso che percorre l'arco. Il calcolo dei potenziali associati alla soluzione duale si ottiene come sempre annullando i costi ridotti in base. Si ha $y_0 = 0$, $y_a = 5$, $y_b = 4$, $y_1 = 8$, $y_2 = 6$, $y_3 = 8$, $y_4 = 5$. I tronchi che è possibile realizzare sono ab, ba, $a2$, $a4$, $b1$, $b2$. L'apertura di uno di questi tronchi sarà conveniente per il cliente se il costo ridotto corrispondente sarà negativo: $c_{ij}' = c_{ij} + y_i - y_j < 0$, cioè $c_{ij} < y_j - y_i$. Il secondo membro di questa disequazione, se positivo, rappresenta il valore c cercato (ovviamente se c è negativo la società Y non avrà convenienza nell'aprire quel tronco).



I valori di c per i tronchi fattibili sono riportati nella tabella seguente:

tronco	*ba*	*a2*	*b1*	*b2*
c	$y_a - y_b = 1$	$y_2 - y_a = 1$	$y_1 - y_b = 4$	$y_2 - y_b = 2$