RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 5 luglio 2010

1. Dato il problema di programmazione lineare P)

$$\begin{array}{lrl} \min & z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \\ & 2x_1 - 2x_2 - x_3 & = -1 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 & \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lrl} \max & -y_1 + y_2 & \\ & 2y_1 + 3y_2 & \leq 3 \\ & -2y_1 + y_2 & \leq 4 \\ & -y_1 - y_2 & \leq 2 \\ & y_2 & \geq 0 \end{array}$$

a) costruirne il duale D; b) risolvere graficamente D; c) dire se P ammette soluzione ottima, e in caso affermativo determinarne il valore.

Disegnando la regione ammissibile del duale e il vettore associato ai coefficienti della funzione obiettivo, si ottiene che la soluzione ottima del problema è $y^* = (-9/8, 7/4)$ di valore 23/8. Poiché il duale ammette ottimo finito anche il primale ammetterà ottimo finito, e il valore della soluzione ottima di P sarà uguale al valore della soluzione ottima di D.

2. Il vettore $w = (6, 4, 1)$ è combinazione conica e non convessa di $v_1 = (4, 4, 0)$, $v_2 = (6, 2, 6)$, $v_3 = (12, 8, 0)$.

3. Utilizzando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\geq$
1	–1	–2	–1	0
0	0	1	–2	1
0	1	2	0	2
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

z	x_2	x_3	$\geq$
1	0	–1	2
1	–2	–1	0
0	1	–2	1
0	1	0	0
0	0	1	0

z	x_3	$\geq$
1	–5	2
1	–1	0
1	–1	2
0	1	0

z	$\geq$
1	2
1	0
1	2

Il valore minimo di z è $z^* = 2$. Sostituendolo nella penultima tabella si ricava $x_3 \leq 0$, $x_3 \leq 2$, $x_3 \geq 0$, quindi $x_3^* = 0$; sostituendo nella terzultima si ha $2x_2 \leq 2$, $x_2 \geq 1$, quindi $x_2^* = 1$; infine con l'ultima sostituzione si ottiene $x_1 \leq 0$, $x_1 \geq 0$: pertanto $x_1^* = 0$.

4. Determinare con il metodo del simplesso il valore della funzione obiettivo in corrispondenza a una soluzione ottima del problema seguente (qualora esista):

$$\begin{array}{lrl} \min & 5x_1 + 8x_2 - 6x_3 & \\ & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & \geq 7 \\ & x_1 \qquad - 6x_3 & \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Conviene eseguire il calcolo attraverso il duale D:

$$\begin{array}{lrl} \max & 7y_1 + 3y_2 & \\ & 2y_1 + y_2 + w_1 & = 5 \\ & 4y_1 \qquad + w_2 & = 8 \\ & 2y_1 + 6y_2 - w_3 & = 6 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3 & \geq 0 \end{array}$$

Per trovare una soluzione ammissibile scriviamo il problema ausiliario:

$$\begin{array}{lrl} \min & z & \\ & 2y_1 + y_2 + w_1 & = 5 \\ & 4y_1 \qquad + w_2 & = 8 \\ & 2y_1 + 6y_2 - w_3 + z & = 6 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, z & \geq 0 \end{array}$$

La tabella canonica si scrive immediatamente sottraendo l'ultima riga alla riga 0:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
0	0	0	0	0	1	0
2	1	1	0	0	0	5
4	0	0	1	0	0	8
2	6	0	0	–1	1	6

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
–2	–6	0	0	1	0	–6
2	1	1	0	0	0	5
4	0	0	1	0	0	8
2	6	0	0	–1	1	6

Il criterio di ottimalità non è soddisfatto. Facendo entrare y_2 in base si ottiene

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
0	0	0	0	0	1	0
$^5/_3$	0	1	0	$^1/_6$	$-^1/_6$	4
4	0	0	1	0	0	8
$^1/_3$	1	0	0	$-^1/_6$	$^1/_6$	1

Questa tabella fornisce una prima soluzione di base per il problema D:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
7	3	0	0	0	0
$^5/_3$	0	1	0	$^1/_6$	4
4	0	0	1	0	8
$^1/_3$	1	0	0	$-^1/_6$	1

Per rendere canonica la tabella bisogna moltiplicare la riga 3 per –3 e sommarla alla riga 0. Si ricava:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
6	0	0	0	$^1/_2$	–3
$^5/_3$	0	1	0	$^1/_6$	4
4	0	0	1	0	8
$^1/_3$	1	0	0	$-^1/_6$	1

Operando un pivot in riga 1 e colonna 2 si ottiene:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
0	0	0	$-^3/_2$	$^1/_2$	–15
0	0	1	$-^5/_{12}$	$^1/_6$	$^2/_3$
1	0	0	¼	0	2
0	1	0	$-^1/_{12}$	$-^1/_6$	$^1/_3$

Con un pivot in riga 1 e colonna 5 si ha quindi:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
0	0	–3	$-^1/_4$	0	–17
0	0	6	$-^5/_2$	1	4
1	0	0	¼	0	2
0	1	1	$-^1/_2$	0	1

Il criterio di ottimalità è soddisfatto. Il problema D (e quindi il problema P) ammette soluzione ottima di valore $z^* = 17$.

5. Tratto da una storia vera ([1])

E' uscito nei migliori cinema *Il Vampiro Paninaro dell'Arizona contro la Strega di Biancaneve*. Il protagonista è un vampiro collezionista di piante grasse che ha la passione dei wurstel al ketchup. Il film si apre con il vampiro che è indeciso se andare a farsi un panino in cucina o a sistemare la collezione nella serra sul terrazzo: ma in cucina la strega gli preparando una macedonia di mele e pere, mentre nella serra Tex Willer si è nascosto dietro un cactus bonsai con la pistola spianata.

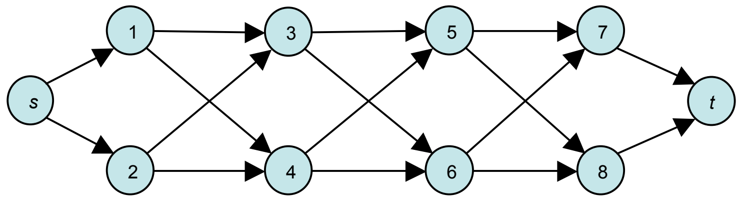
Dal film è stato tratto un videogioco che sarà commercializzato tra breve. Il progettista sta mettendo a punto le alternative e vuole calcolare la probabilità che il vampiro sopravviva ai cattivi. A ogni stadio si deve scegliere se andare in cucina o in terrazzo, e il progettista ha attribuito certe probabilità p di sopravvivenza che dipendono dallo stadio del gioco e dal fatto se si decide di rimanere nel luogo dove ci

[1] Trailer di Radio 610.

si trova o se si decide di cambiare. La probabilità di sopravvivenza alla fine III stadio del gioco è il prodotto delle probabilità di sopravvivenza relative alle scelte fatte fino a quel punto.

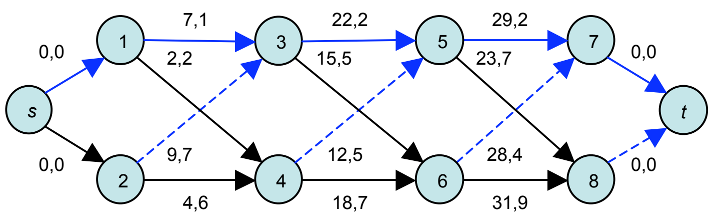
	I stadio		II stadio		III stadio	
	p	–100 log *p*	*p*	–100 log *p*	*p*	–100 log *p*
cucina-cucina	90%	4,6	65%	18,7	48%	31,9
cucina-terrazzo	80%	9,7	75%	12,5	52%	28,4
terrazzo-terrazzo	85%	7,1	60%	22,2	51%	29,2
terrazzo-cucina	95%	2,2	70%	15,5	58%	23,7

Il progettista vorrebbe calcolare la più alta probabilità di sopravvivenza, ma si rende presto conto che le combinazioni di scelte sono un po' troppe (quante?). Voi che avete studiato ricerca operativa sapete però che il problema è un PL e si può impostare come cammino ottimo su questo grafo.



Determinata una soluzione iniziale ammissibile di base, calcolate i costi ridotti e mostrate come aumentarne il valore attraverso un'operazione di pivot del simplesso su reti.

Formulazione. Indicando con n il numero di stadi, le combinazioni di scelte sono 2^{n+1}: per $n = 3$ si hanno quindi 16 diverse combinazioni. Operando una scelta a ogni stadio si determina un (s, t)-cammino sul grafo indicato. Ogni arco del cammino corrisponde al passaggio da uno stadio al successivo. Se si attribuisce a ogni arco uv la probabilità di sopravvivere al passaggio, sotto le ipotesi del problema si può attribuire a ogni cammino π un peso $P(\pi)$ pari al prodotto dei pesi degli archi che lo compongono: tale peso vale la probabilità di sopravvivenza complessiva. Il progettista del videogioco deve quindi determinare un cammino π di peso massimo. Poiché la funzione logaritmo è monotona crescente, massimizzare $\mathrm{P}(\pi)$ è equivalente a massimizzare $100 \log \mathrm{P}(\pi) = 100 \log \prod_{uv\in P} p_{uv} = \sum_{uv\in P} 100 \log(p_{uv})$. Si può quindi dire che il problema consiste nel trovare un cammino di peso minimo sul grafo pesato con pesi $c_{uv} = -100 \log p_{uv}$.



Soluzione. Possiamo prendere come soluzione ammissibile iniziale il cammino (s1, 13, 35, 57, 7t). Per costruire una base (degenere) completiamo quest'insieme in modo da formare un albero ricoprente B. Ad esempio possiamo aggiungere gli archi 23, 45, 67, 8t. Per sapere se la soluzione è ottima dobbiamo calcolare i potenziali y ai nodi applicando per ogni $uv \in B$ la formula $c_{uv} + y_u - y_v = 0$ dopo aver fissato uno dei valori ad arbitrio, per esempio $y_s = 0$.

$c_{s1} + y_s - y_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0$ $\quad$ $c_{13} + y_1 - y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 7{,}1$ $\quad$ $c_{35} + y_3 - y_5 = 0 \rightarrow y_5 = 29{,}3$

$c_{57} + y_5 - y_7 = 0 \rightarrow y_7 = 58{,}5$ $\quad$ $c_{7t} + y_7 - y_t = 0 \rightarrow y_t = 58{,}5$ $\quad$ $c_{23} + y_2 - y_3 = 0 \rightarrow y_2 = -2{,}6$

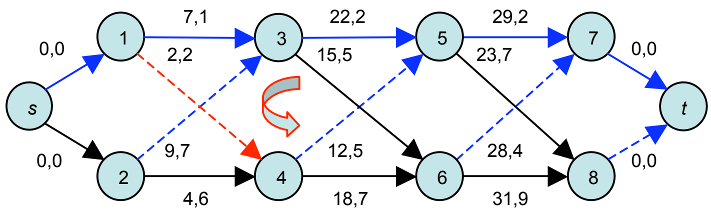
$c_{45} + y_4 - y_5 = 0 \rightarrow y_4 = 16{,}8$ $\quad$ $c_{67} + y_6 - y_7 = 0 \rightarrow y_6 = 20{,}1$ $\quad$ $c_{8t} + y_8 - y_t = 0 \rightarrow y_8 = 58{,}5$

I costi ridotti fuori base valgono $c_{uv} + y_u - y_v \ \forall uv \notin B$. Quindi

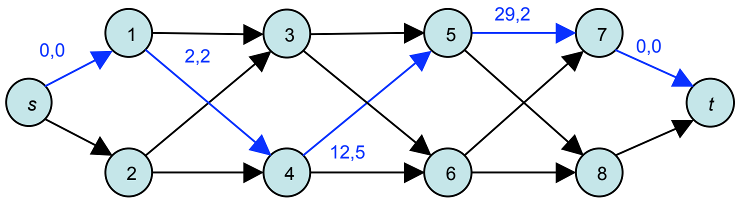
$c_{s2} + y_s - y_2 = 2{,}6$ $\quad$ $c_{14} + y_1 - y_4 = -14{,}6$ $\quad$ $c_{24} + y_2 - y_4 = -14{,}8$

$c_{36} + y_3 - y_6 = 2{,}5$ $\quad$ $c_{46} + y_4 - y_6 = 15{,}4$ $\quad$ $c_{58} + y_5 - y_8 = -5{,}5$ $\quad$ $c_{68} + y_6 - y_8 = -6{,}5$

Trattandosi di un problema di minimizzazione, conviene far entrare in base una variabile nulla con costo ridotto negativo (non vi sono variabili sature in quanto il problema è privo di capacità). Il caso più favorevole si ha con x_{24}, ma il suo inserimento comporta $\delta = 0$ e non si avrebbe miglioramento: questo è il rischio che si corre con una base degenere! Conviene allora provare a inserire in base x_{14}, che ha costo ridotto $-14{,}6$ e introduce un ciclo sul quale è possibile indirizzare una circolazione non nulla.



Il valore massimo ammissibile per δ, pari a 1, è dettato dai valori di soglia degli archi 13, 35. Eseguito l'aggiornamento, la soluzione migliora di $-14{,}6\delta = -14{,}6$ e restituisce il cammino riportato di seguito.



RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**
prova scritta del 5 luglio 2010

1. Dato il problema di programmazione lineare P) $\min\ z = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3$

$$\begin{array}{ll} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & -2y_1 + y_2 \\ & -2y_1 + 2y_2 \le 3 \\ & 2y_1 + 3y_2 \le 6 \\ & 2y_1 \le 5 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

a) costruirne il duale D; b) risolvere graficamente D; c) dire se P ammette soluzione ottima, e in caso affermativo determinarne il valore.

Disegnando la regione ammissibile del duale e il vettore associato ai coefficienti della funzione obiettivo, si ottiene che la soluzione ottima del problema è $y^* = (0, {}^3/_2)$ di valore ${}^3/_2$. Poiché il duale ammette ottimo finito anche il primale ammetterà ottimo finito, e il valore della soluzione ottima di P sarà uguale al valore della soluzione ottima di D.

2. Il vettore $w = (0, 6, 8)$ è combinazione conica e non convessa di $v_1 = (2, 4, 2)$, $v_2 = (-6, 2, 0)$, $v_3 = (12, -12, 2)$.

3. Utilizzando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_2 - 2x_3 \le 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
1	–3	1	2	0
0	1	1	0	2
0	0	1	–2	1
0	–1	0	0	0
0	0	–1	0	0
0	0	0	–1	0

z	x_1	x_3	$\le$
1	–3	2	0
0	1	0	2
0	0	–2	1
0	–1	0	0
0	0	–1	0

z	x_3	$\le$
1	2	6
0	–2	1
0	0	2
0	–1	0

z	$\ge$
1	7
0	2
1	6

Il valore massimo di z è $z^* = 6$. Sostituendolo nella penultima tabella si ricava $x_3 \le 0$, $2x_3 \ge -1$, $x_3 \ge 0$, quindi $x_3^* = 0$; sostituendo nella terzultima si ha $3x_1 \ge 6$, $x_1 \le 2$, $x_1 \ge 0$, quindi $x_1^* = 2$; infine con l'ultima sostituzione si ottiene $x_2 \le 0$, $x_2 \le 1$, $x_2 \ge 0$: pertanto $x_2^* = 0$.

4. Determinare con il metodo del simplesso il valore della funzione obiettivo in corrispondenza a una soluzione ottima del problema seguente (qualora esista):

$$\begin{array}{ll} \min & 8x_1 + 6x_2 - 10x_3 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 5 \\ & 2x_1 - 5x_3 \ge 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

Conviene eseguire il calcolo attraverso il duale D:

$$\begin{array}{ll} \max & 5y_1 + 2y_2 \\ & 2y_1 + 2y_2 + w_1 = 8 \\ & 3y_1 + w_2 = 6 \\ & 2y_1 + 5y_2 - w_3 = 10 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3 \ge 0 \end{array}$$

Per trovare una soluzione ammissibile scriviamo il problema ausiliario:

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ & 2y_1 + 2y_2 + w_1 = 8 \\ & 3y_1 + w_2 = 6 \\ & 2y_1 + 5y_2 - w_3 = 10 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, z \ge 0 \end{array}$$

La tabella canonica si scrive immediatamente sottraendo l'ultima riga alla riga 0:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
0	0	0	0	0	1	0
2	2	1	0	0	0	8
3	0	0	1	0	0	6
2	5	0	0	–1	1	10

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
–2	–5	0	0	1	0	10
2	2	1	0	0	0	8
3	0	0	1	0	0	6
2	5	0	0	–1	1	10

Il criterio di ottimalità non è soddisfatto. Facendo entrare y_2 in base si ottiene

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
0	0	0	0	0	1	0
$^6/_5$	0	1	0	$^2/_5$	$-^2/_5$	4
3	0	0	1	0	0	6
$^2/_5$	1	0	0	$-^1/_5$	$^1/_5$	2

Questa tabella fornisce una prima soluzione di base per il problema D:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
5	2	0	0	0	0
$^6/_5$	0	1	0	$^2/_5$	4
3	0	0	1	0	6
$^2/_5$	1	0	0	$-^1/_5$	2

Per rendere canonica la tabella bisogna moltiplicare la riga 3 per –2 e sommarla alla riga 0. Si ricava:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
$^{21}/_5$	0	0	0	$^2/_5$	–4
$^6/_5$	0	1	0	$^2/_5$	4
3	0	0	1	0	6
$^2/_5$	1	0	0	$-^1/_5$	2

Operando un pivot in riga 2 e colonna 1 si ottiene:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
0	0	0	$-^7/_5$	$^2/_5$	$-^{62}/_5$
0	0	1	$-^2/_5$	$^2/_5$	$^8/_5$
1	0	0	$^1/_3$	0	2
0	1	0	$-^2/_{15}$	$-^1/_5$	$^6/_5$

Con un pivot in riga 1 e colonna 5 si ha quindi:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
0	0	–1	–1	0	–14
0	0	$^5/_2$	–1	1	4
1	0	0	$^1/_3$	0	2
0	1	½	$-^1/_3$	0	2

Il criterio di ottimalità è soddisfatto. Il problema D (e quindi il problema P) ammette soluzione ottima di valore $z^* = 14$.

5. Tratto da una storia vera ([2])

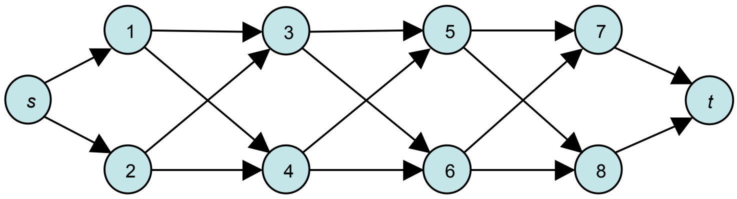
E' uscito nei migliori cinema *Il Vampiro Paninaro dell'Arizona contro la Strega di Biancaneve*. Il protagonista è un vampiro collezionista di piante grasse che ha la passione dei wurstel al ketchup. Il film si apre con il vampiro che è indeciso se andare a farsi un panino in cucina o a sistemare la collezione nella serra sul terrazzo: ma in cucina la strega gli sta preparando una macedonia di mele e pere, mentre nella serra Tex Willer si è nascosto dietro un cactus bonsai con la pistola spianata.
Dal film è stato tratto un videogioco che sarà commercializzato tra breve. Il progettista sta mettendo a punto le alternative e vuole calcolare la probabilità che il vampiro sopravviva ai cattivi. A ogni stadio si deve scegliere se andare in cucina o in terrazzo, e il progettista ha attribuito certe probabilità p di sopravvivenza che dipendono dallo stadio del gioco e dal fatto se si decide di rimanere nel luogo dove ci

[2] Trailer di Radio 610.

si trova o se si decide di cambiare. La probabilità di sopravvivenza alla fine III stadio del gioco è il prodotto delle probabilità di sopravvivenza relative alle scelte fatte fino a quel punto.

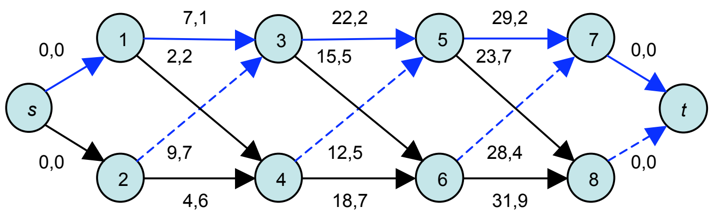
	I stadio		II stadio		III stadio	
	p	$-100 \log p$	p	$-100 \log p$	p	$-100 \log p$
cucina-cucina	90%	4,6	65%	18,7	48%	31,9
cucina-terrazzo	80%	9,7	75%	12,5	52%	28,4
terrazzo-terrazzo	85%	7,1	60%	22,2	51%	29,2
terrazzo-cucina	95%	2,2	70%	15,5	58%	23,7

Il progettista vorrebbe calcolare la minima probabilità di sopravvivenza, ma si rende presto conto che le combinazioni di scelte sono un po' troppe (quante?). Voi che avete studiato ricerca operativa sapete però che il problema è un PL e si può impostare come cammino ottimo su questo grafo.



Determinata una soluzione iniziale ammissibile di base, calcolate i costi ridotti e mostrate come ridurne il valore attraverso un'operazione di pivot del simplesso su reti.

Formulazione. Indicando con n il numero di stadi, le combinazioni di scelte sono 2^{n+1}: per $n = 3$ si hanno quindi 16 diverse combinazioni. Operando una scelta a ogni stadio si determina un (s, t)-cammino sul grafo indicato. Ogni arco del cammino corrisponde al passaggio da uno stadio al successivo. Se si attribuisce a ogni arco uv la probabilità di sopravvivere al passaggio, sotto le ipotesi del problema si può attribuire a ogni cammino π un peso $P(\pi)$ pari al prodotto dei pesi degli archi che lo compongono: tale peso vale la probabilità di sopravvivenza complessiva. Il progettista del videogioco deve quindi determinare un cammino π di peso minimo. Poiché la funzione logaritmo è monotona crescente, minimizzare $\mathrm{P}(\pi)$ è equivalente a minimizzare $100 \log \mathrm{P}(\pi) = 100 \log \prod_{uv\in P} p_{uv} = \sum_{uv\in P} 100 \log(p_{uv})$. Si può quindi dire che il problema consiste nel trovare un cammino di peso massimo sul grafo pesato con pesi $c_{uv} = -100 \log p_{uv}$.



Soluzione. Possiamo prendere come soluzione ammissibile iniziale il cammino (s1, 13, 35, 57, 7t). Per costruire una base (degenere) completiamo quest'insieme in modo da formare un albero ricoprente B. Ad esempio possiamo aggiungere gli archi 23, 45, 67, 8t. Per sapere se la soluzione è ottima dobbiamo calcolare i potenziali y ai nodi applicando per ogni $uv \in B$ la formula $c_{uv} + y_u - y_v = 0$ dopo aver fissato uno dei valori ad arbitrio, per esempio $y_s = 0$.

$c_{s1} + y_s - y_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0$ $\qquad$ $c_{13} + y_1 - y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 7{,}1$ $\qquad$ $c_{35} + y_3 - y_5 = 0 \rightarrow y_5 = 29{,}3$

$c_{57} + y_5 - y_7 = 0 \rightarrow y_7 = 58{,}5$ $\qquad$ $c_{7t} + y_7 - y_t = 0 \rightarrow y_t = 58{,}5$ $\qquad$ $c_{23} + y_2 - y_3 = 0 \rightarrow y_2 = -2{,}6$

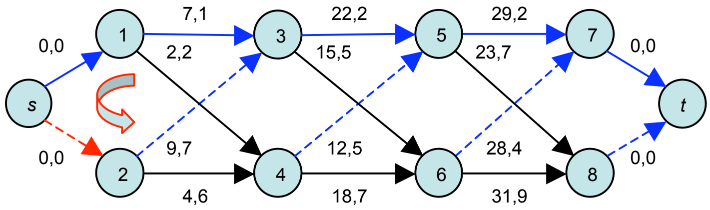
$c_{45} + y_4 - y_5 = 0 \rightarrow y_4 = 16{,}8$ $\qquad$ $c_{67} + y_6 - y_7 = 0 \rightarrow y_6 = 20{,}1$ $\qquad$ $c_{8t} + y_8 - y_t = 0 \rightarrow y_8 = 58{,}5$

I costi ridotti fuori base valgono $c_{uv} + y_u - y_v \ \forall uv \notin B$. Quindi

$c_{s2} + y_s - y_2 = 2{,}6$ $\qquad$ $c_{14} + y_1 - y_4 = -14{,}6$ $\qquad$ $c_{24} + y_2 - y_4 = -14{,}8$

$c_{36} + y_3 - y_6 = 2{,}5$ $\qquad$ $c_{46} + y_4 - y_6 = 15{,}4$ $\qquad$ $c_{58} + y_5 - y_8 = -5{,}5$ $\qquad$ $c_{68} + y_6 - y_8 = -6{,}5$

Trattandosi di un problema di massimizzazione, conviene far entrare in base una variabile nulla con costo ridotto positivo (non vi sono variabili sature in quanto il problema è privo di capacità). Il caso più favorevole si ha con x_{46}, ma il suo inserimento comporta $\delta = 0$ e non si avrebbe miglioramento: questo è il rischio che si corre con una base degenere! Conviene allora provare a inserire in base x_{s2}, che ha costo ridotto 2,6 e introduce un ciclo sul quale è possibile indirizzare una circolazione non nulla.



Il valore massimo ammissibile per δ, pari a 1, è dettato dai valori di soglia degli archi s1, 13. Eseguito l'aggiornamento, la soluzione migliora di $2{,}6\delta = 2{,}6$ e restituisce il cammino riportato di seguito.