RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 21 giugno 2010

1. Scrivere il duale del problema P:

$$\begin{aligned} \min\ & 6x_1 - 4x_2 + x_3 \\ & {}^1/_2\, x_1 - x_2 = {}^7/_2 \\ & x_1 + x_2 - {}^1/_4\, x_3 \le -1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max\ & 7y_1 + y_2 \\ & y_1 - y_2 \le 6 \\ & -2y_1 - y_2 \le -4 \\ & y_2 = 4 \end{aligned}$$

e dire se P ammette soluzione ottima. In caso affermativo, calcolare il valore z^* della funzione obiettivo in corrispondenza all'ottimo senza ricorrere al metodo del simplesso.

Sostituita $y_2 = 4$ il problema duale diventa $\max\{7y_1 + 4 \colon y_1 \le 2, y_1 \le 0\}$ e l'ottimo si ha per $y_1 = 0$. Quindi anche il primale ammette soluzione ottima, e questa vale $z^* = 4$.

2. Dire se il vettore $\mathbf{w} = (4, 0, 2)$ è combinazione affine o conica dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2) \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1) \qquad \mathbf{v}_3 = (1, -1, -1)$$

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema di programmazione lineare qui a fianco esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\boxed{\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - x_2 - 4x_3 \\ & x_1 - 2x_2 \le 4 \\ & x_1 - 5x_3 \le 6 \\ & x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
0	1	–2	4	4
0	1	0	–5	6
0	–1	0	0	0
0	0	–1	0	0
0	0	0	–1	0
1	–2	1	4	0

z	x_1	x_3	$\le$
2	–3	12	4
0	1	–5	6
0	–1	0	0
1	–2	4	0
0	0	–1	0
2	–4	8	0

z	x_3	$\le$
2	–3	22
0	–5	6
1	–6	12
0	–1	0
2	–12	24

Poiché la colonna della variabile x_3 contiene solo elementi negativi, il sistema ottenuto proiettando sull'asse z non contiene disequazioni: pertanto la variabile z è illimitata e il problema risulta a sua volta illimitato superiormente.

4. Determinare con il metodo del simplesso il valore della funzione obiettivo in corrispondenza a una soluzione ottima del problema seguente (qualora esista):

$$\begin{aligned} \min\ & 4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ & 5x_1 - x_2 - 3x_3 \ge 3 \\ & 2x_1 - 4x_3 \ge 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Conviene eseguire il calcolo attraverso il duale D:

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_1 + 4y_2 \\ & 5y_1 + 2y_2 + w_1 = 4 \\ & -y_1 + w_2 = 3 \\ & 3y_1 + 4y_2 - w_3 = 1 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Per trovare una soluzione ammissibile scriviamo il problema ausiliario:

$$\begin{aligned} \min\ & z \\ & 5y_1 + 2y_2 + w_1 = 4 \\ & -y_1 + w_2 = 3 \\ & 3y_1 + 4y_2 - w_3 + z = 1 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, z \ge 0 \end{aligned}$$

La tabella canonica si scrive immediatamente sottraendo l'ultima riga alla riga 0:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
0	0	0	0	0	1	0
5	2	1	0	0	0	4
–1	0	0	1	0	0	3
3	4	0	0	–1	1	1

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
–3	–4	0	0	1	0	–1
5	2	1	0	0	0	4
–1	0	0	1	0	0	3
3	4	0	0	–1	1	1

Il criterio di ottimalità non è soddisfatto. Facendo entrare y_2 in base si ottiene

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
–3	–4	0	0	1	0	–1
$^7/_2$	0	1	0	½	–½	$^7/_2$
–1	0	0	1	0	0	3
$^3/_4$	1	0	0	$-^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$

Questa tabella fornisce una prima soluzione di base per il problema D:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
3	4	0	0	0	0
$^7/_2$	0	1	0	½	$^7/_2$
–1	0	0	1	0	3
$^3/_4$	1	0	0	$-^1/_4$	$^1/_4$

Per rendere canonica la tabella bisogna moltiplicare la riga 3 per 4 e sottrarla alla riga 0. Così si ricava:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
0	0	0	0	1	–1
$^7/_2$	0	1	0	½	$^7/_2$
–1	0	0	1	0	3
$^3/_4$	1	0	0	$-^1/_4$	$^1/_4$

Operando un pivot in riga 1 e colonna 5 si ha poi:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
–7	0	–2	0	0	–8
7	0	2	0	1	7
–1	0	0	1	0	3
$^5/_2$	1	½	0	0	2

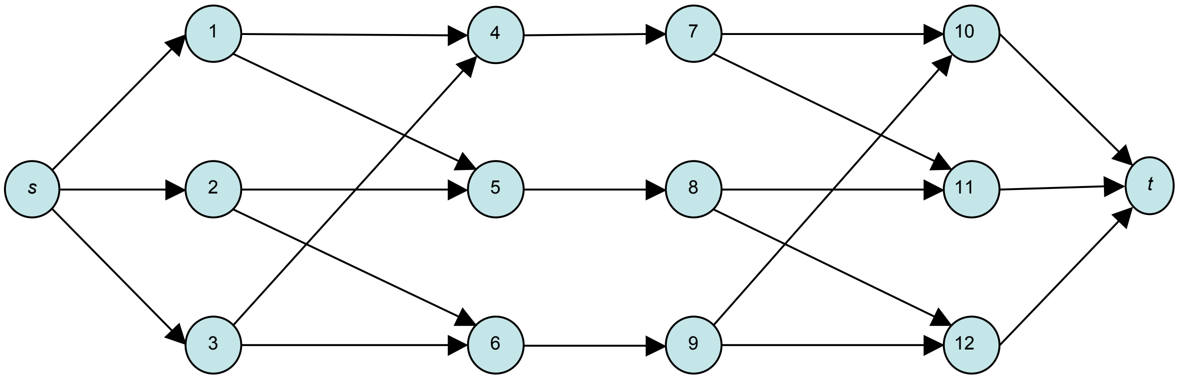
Il criterio di ottimalità è soddisfatto. Il problema D (e quindi il problema P) ammette soluzione ottima di valore $z^* = 8$.

5. **Che banca!**

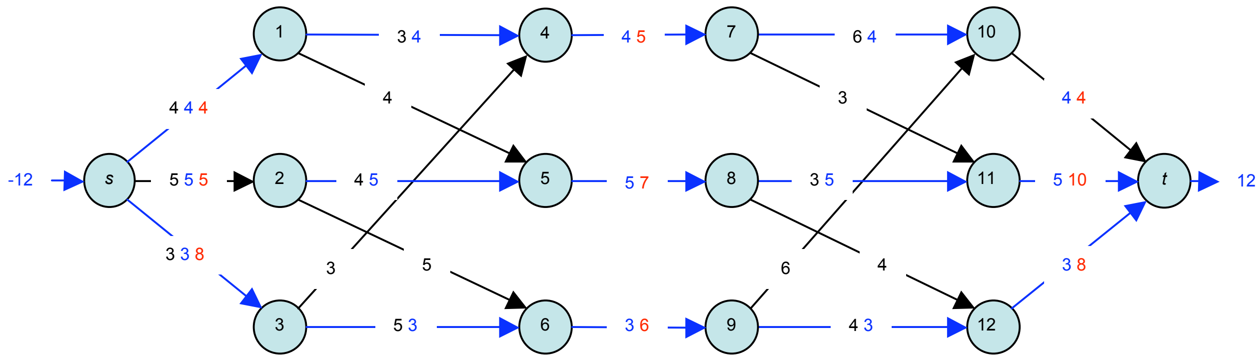
Sono un pigro e non ho voglia di lavorarci. Ma in banca mi dicono che i miei 12000 euro potrebbero fruttare meglio se solo mi decidessi a fare investimenti in modo ragionato. Mi hanno proposto tre fondi: A, B, C. Il rendimento previsto è indicato nella tabella qui sotto, nella prima colonna di ogni anno (1000 euro investiti sul fondo i nell'anno k rendono c_{ik}). Ma ogni anno sono disponibili solo poche quote (q_{ik} è quanto posso investire nell'anno k sul fondo i), per un ammontare pari a quello indicato nella seconda colonna. Inoltre se un anno investo su A (su B, su C) nel successivo non posso passare quelle quote su C (su A, su B).

	2011		2012		2013	
A	40	4000	30	5000	60	4000
B	50	5000	40	7000	30	10000
C	30	8000	50	6000	40	8000
	c_{i1}	q_{i1}	c_{i2}	q_{i2}	c_{i3}	q_{i3}

Gli utili non li voglio reinvestire. Banalmente pensavo di mettere per tutti e tre gli anni 4000 su A, 5000 su B e 3000 su C. Ma in banca mi hanno detto che per capire se si può fare di meglio basta attribuire capacità e profitti agli archi del grafo seguente, poi formulare come flusso a costo minimo il problema di ripartire ogni anno l'investimento in modo da massimizzare il profitto complessivo, quindi risolvere il problema usando il simplesso su reti. Eh? Ma io volevo solo sapere: la mia soluzione, è ottima o no?



Il problema consiste nello spedire un flusso di 12 unità dal nodo s al nodo t in modo da massimizzare il profitto con profitti (nero) e capacità (rosso) associati agli archi come rappresentato in figura (dove il profitto non è indicato si intende zero, e dove non è indicata la capacità si intende $+\infty$): la soluzione proposta è indicata in blu e gli archi di questo colore corrispondono a una base B (degenere, in quanto l'arco $(s, 1)$ è saturo).



I potenziali si ricavano dalla formula $c_{ij} + y_i - y_j = 0$ per ogni $ij \in B$. Fissando arbitrariamente $y_{10} = 10$ si ha in sequenza:

$c_{7,10} + y_7 - y_{10} = 0 \rightarrow y_7 = 4$ $\quad$ $c_{4,7} + y_4 - y_7 = 0 \rightarrow y_4 = 4$ $\quad$ $c_{1,4} + y_1 - y_4 = 0 \rightarrow y_1 = 1$

$c_{s,1} + y_s - y_1 = 0 \rightarrow y_s = -3$ $\quad$ $c_{s,3} + y_s - y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 0$ $\quad$ $c_{3,6} + y_3 - y_6 = 0 \rightarrow y_6 = 5$

$c_{6,9} + y_6 - y_9 = 0 \rightarrow y_9 = 5$ $\quad$ $c_{9,12} + y_9 - y_{12} = 0 \rightarrow y_{12} = 9$ $\quad$ $c_{12,t} + y_{12} - y_t = 0 \rightarrow y_t = 9$

$c_{11,t} + y_{11} - y_t = 0 \rightarrow y_{11} = 9$ $\quad$ $c_{8,11} + y_8 - y_{11} = 0 \rightarrow y_8 = 6$ $\quad$ $c_{5,8} + y_5 - y_8 = 0 \rightarrow y_5 = 6$

$c_{2,5} + y_2 - y_5 = 0 \rightarrow y_2 = 2$

I costi ridotti fuori base valgono $c_{ij} + y_i - y_j$ $\forall ij \notin B$. Quindi

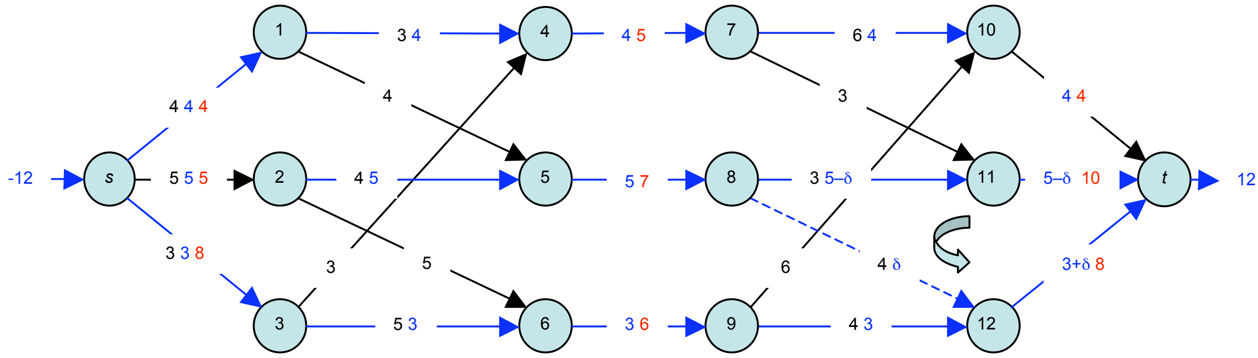
$c_{s,2} + y_s - y_2 = 5 - 3 - 2 = 0$ $\quad$ $c_{1,5} + y_1 - y_5 = 4 + 1 - 6 = -1$ $\quad$ $c_{2,6} + y_2 - y_6 = 5 + 2 - 5 = 2$

$c_{3,4} + y_3 - y_4 = 3 + 0 - 4 = -1$ $\quad$ $c_{7,11} + y_7 - y_{11} = 3 + 4 - 9 = -2$ $\quad$ $c_{8,12} + y_8 - y_{12} = 4 + 6 - 9 = 1$

$c_{9,10} + y_9 - y_{10} = 6 + 5 - 10 = 1$ $\quad$ $c_{10,t} + y_{10} - y_t = 0 + 10 - 9 = 1$

Trattandosi di un problema di massimizzazione e dal momento che tutte le variabili fuori base sono fissate alla soglia (= 0), conviene far entrare in base una variabile legata a un costo ridotto positivo. Il massimo si ha con x_{26}, ma il suo inserimento ci costringerebbe ad aggiornare un gran numero di dati.

Siccome il problema richiede solo di verificare se la soluzione proposta è ottima, accontentiamoci di far entrare in base $x_{8,12}$.



Le variabili coinvolte nel ciclo evidenziato vengono alterate di un termine ±δ che, al massimo, può valere 5. Poiché δ ≠ 0, la nuova soluzione migliora la precedente di 5 unità, quindi quella proposta non era la soluzione ottima.