RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 21 giugno 2010

1. Scrivere il duale del problema P:

$$\begin{array}{lrl} \max & {}^{1}/_{2}\,x_1 - 3x_2 - 2x_3 & \\ & {}^{2}/_{3}\,x_1 \quad - \quad x_3 & = {}^{7}/_{3} \\ & -\,x_1 + x_2 - {}^{1}/_{3}\,x_3 & \geq -4 \\ & x_1, x_3 & \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lrl} \min & 7y_1 + 4y_2 & \\ & 2y_1 + y_2 & \geq {}^{1}/_{2} \\ & y_2 & = 3 \\ & -3y_1 + {}^{1}/_{3}\,y_2 & \geq -2 \end{array}$$

e dire se P ammette soluzione ottima. In caso affermativo, calcolare il valore z^* della funzione obiettivo in corrispondenza all'ottimo senza ricorrere al metodo del simplesso.

Sostituita $y_2 = 3$ il problema duale diventa $\min\{7y_1 + 12\text{: } y_1 \geq -4,\ y_1 \leq 1\}$ e l'ottimo si ha per $y_1 = -4$. Quindi anche il primale ammette soluzione ottima, e questa vale $z^* = -16$.

2. Dire se il vettore $\mathbf{w} = (5, 9, -4)$ è combinazione affine o conica dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = (2, 3, -1) \qquad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2) \qquad \mathbf{v}_3 = (1, -1, -1)$$

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il problema di programmazione lineare qui a fianco esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ & x_1 - 3x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_3 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{array}}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\geq$
0	1	–3	0	4
0	1	0	–2	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
1	–2	–1	–4	0

z	x_1	x_3	$\geq$
0	1	0	4
0	1	–2	1
0	1	0	0
0	0	1	0
1	–2	–4	0

z	x_1	$\geq$
0	1	4
0	1	1
0	1	0
1	–2	0

z	$\geq$
1	8
1	2
1	0

Il valore minimo di z è 8. Una soluzione ottima è $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

4. Determinare con il metodo del simplesso il valore della funzione obiettivo in corrispondenza a una soluzione ottima del problema seguente (qualora esista):

$$\begin{array}{lrl} \min & 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 & \\ & 4x_1 - x_2 - 2x_3 & \geq 2 \\ & 2x_1 \quad - 4x_3 & \geq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Conviene eseguire il calcolo attraverso il duale D:

$$\begin{array}{lrl} \max & 2y_1 + 4y_2 & \\ & 4y_1 + 2y_2 + w_1 & = 5 \\ & -\,y_1 \quad + w_2 & = 2 \\ & 2y_1 + 4y_2 - w_3 & = 2 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3 & \geq 0 \end{array}$$

Per trovare una soluzione ammissibile scriviamo il problema ausiliario:

$$\begin{array}{lrl} \min & z & \\ & 4y_1 + 2y_2 + w_1 & = 5 \\ & -\,y_1 \quad + w_2 & = 2 \\ & 2y_1 + 4y_2 - w_3 + z & = 2 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, z & \geq 0 \end{array}$$

La tabella canonica si scrive immediatamente sottraendo l'ultima riga alla riga 0:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
0	0	0	0	0	1	0
4	2	1	0	0	0	5
–1	0	0	1	0	0	2
2	4	0	0	–1	1	2

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
–2	0	0	0	1	0	–2
4	2	1	0	0	0	5
–1	0	0	1	0	0	2
2	4	0	0	–1	1	2

Il criterio di ottimalità non è soddisfatto. Facendo entrare y_1 in base si ottiene

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	z	
0	0	0	0	0	1	0
0	–6	1	0	2	–2	1
0	2	0	1	–½	½	3
1	2	0	0	–½	½	1

Questa tabella fornisce una prima soluzione di base per il problema D:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
2	4	0	0	0	0
0	–6	1	0	2	1
0	2	0	1	–½	3
1	2	0	0	–½	1

Per rendere canonica la tabella bisogna moltiplicare la riga 3 per –2 e sommarla alla riga 0. Si ricava:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
0	0	0	0	1	–2
0	–6	1	0	2	1
0	2	0	1	–½	3
1	2	0	0	–½	1

Operando un pivot in riga 1 e colonna 5 si ottiene:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
0	3	–½	0	0	$-^5/_2$
0	–3	½	0	1	½
0	½	$^1/_4$	1	0	$^{13}/_4$
1	½	$^1/_4$	0	0	$^5/_4$

Con un pivot in riga 3 e colonna 2 si ha quindi:

y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
–6	0	–2	0	0	–10
6	0	2	0	1	8
–1	0	0	1	0	2
2	1	½	0	0	$^5/_2$

Il criterio di ottimalità è soddisfatto. Il problema D (e quindi il problema P) ammette soluzione ottima di valore $z^* = 10$.

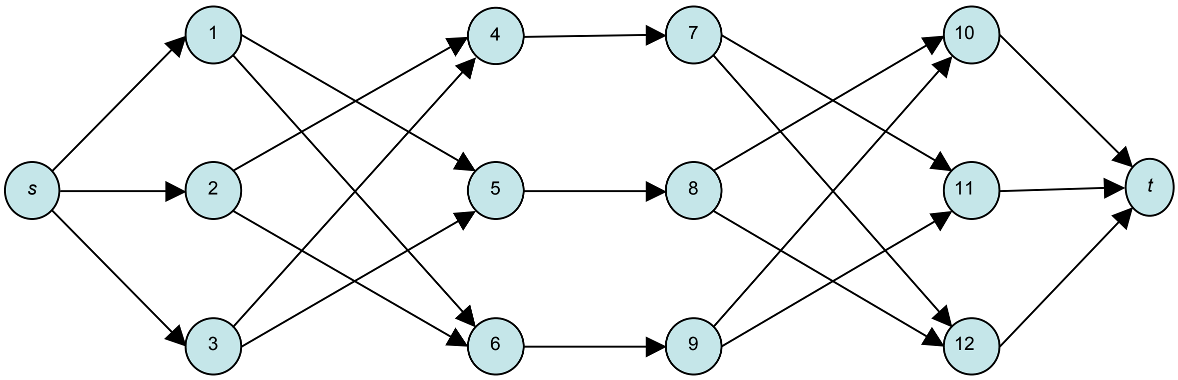
5. C'è tanta tera da zappa'… ([1])

Trovare lavoro ai laureati in eccesso sta diventando un serio problema per il piccolo stato di Ailati, dove d'altronde nell'ultimo decennio il governo ha riscoperto e fortemente stimolato la vocazione agricola delle generazioni precedenti. Un'azienda agricola della progredita regione dell'Ainadap assume ingegneri gestionali e per selezionarli li sottopone a un test che, oltre a una prova di dialetto, richiede la risoluzione del problema seguente. Dato un terreno di 1,2 ettari ci si chiede se può convenire dividerlo ogni anno in 3 parti con colture differenti: 1) patate, 2) wurstel e 3) crauti. Infatti ogni anno il prezzo pagato sul mercato varia: sia c_{it} ciò che si ricava nell'anno t da 1000 mq coltivati con la coltura i, e sia q_{it} la quantità massima di terreno (mq) su cui si può avviare la coltura i nell'anno t. La tabella dà i valori di q_{it} e una proiezione di c_{it} per le tre colture e i tre anni a venire. Si tenga conto che se in un anno si seminano patate (wurstel, crauti), nel successivo non si può ripetere la stessa semina sullo stesso terreno.

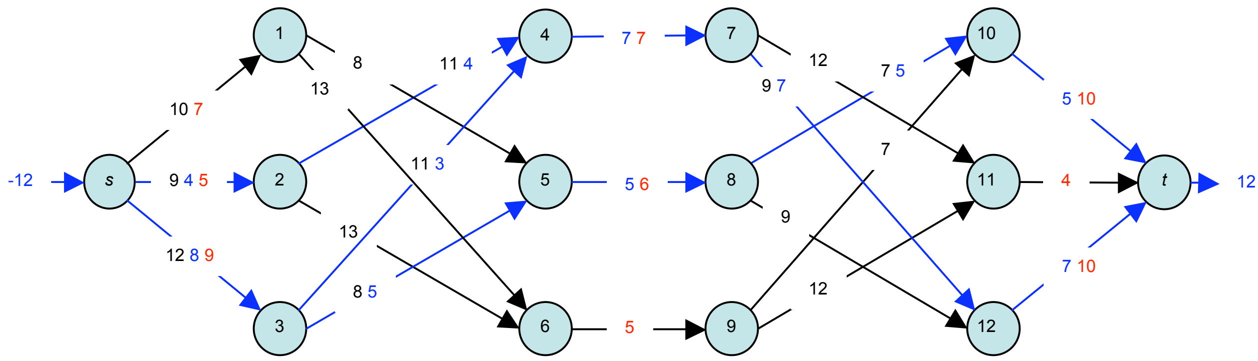
[1] Nino Manfredi in "Guardia, guardia scelta, brigadiere, appuntato, maresciallo", regia di Mauro Bolognini (Italia 1956).

	2011		2012		2013	
patate	100	7000	110	7000	70	10000
wurstel	90	5000	80	6000	120	4000
crauti	120	9000	130	5000	90	10000
	c_{i1}	q_{i1}	c_{i2}	q_{i2}	c_{i3}	q_{i3}

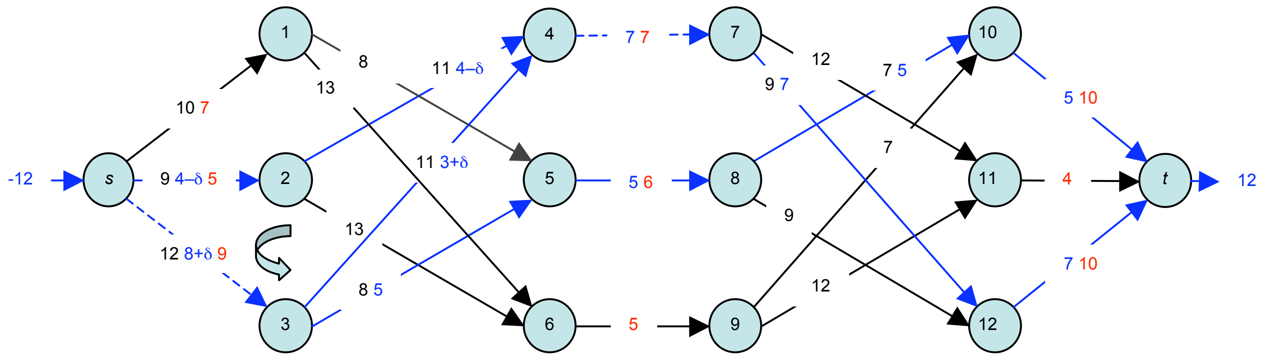
Il ragioniere dell'azienda propone questa soluzione: il primo anno si coltivano 4000 mq a wurstel e 8000 a crauti; nel secondo i primi 4000 vengono coltivati a patate, e, degli altri 8000, 3000 passano a patate e 5000 a wurstel; nel terzo anno infine i 7000 coltivati a patate vengono girati a crauti e i 5000 rimanenti passano a patate. Attribuendo capacità e profitti agli archi del grafo seguente, formulate come flusso a costo minimo il problema di ripartire ogni anno le colture in modo da massimizzare il profitto complessivo. Poi, usando il simplesso su reti, dite se la soluzione del ragioniere è ottima o no.



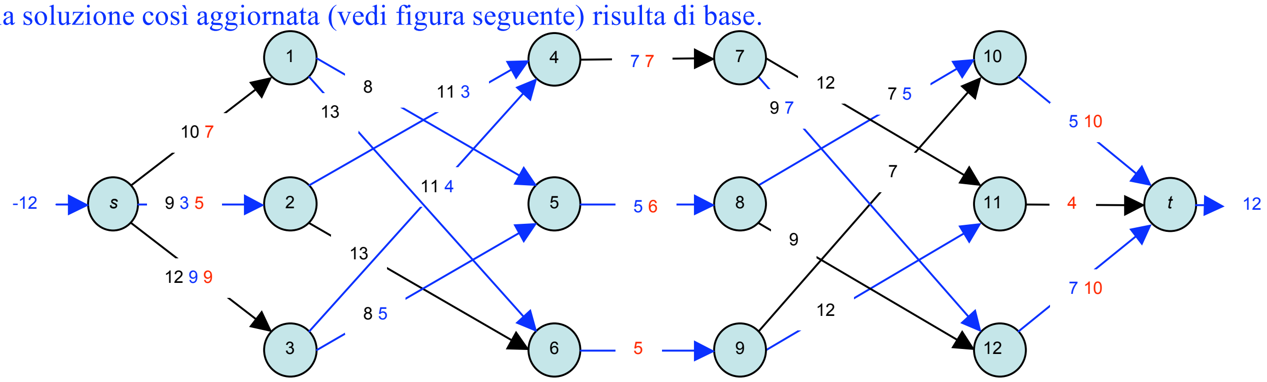
Il problema consiste nello spedire un flusso di 12 unità dal nodo s al nodo t in modo da massimizzare il profitto con profitti (nero) e capacità (rosso) associati agli archi come rappresentato in figura (i valori di soglia sono tutti a 0, dove il profitto non è indicato si intende 0, e dove non è indicata la capacità si intende +∞): la soluzione proposta è indicata in blu, ma gli archi di questo colore non corrispondono a una base. E' quindi necessario eseguire un'operazione di pivot sui cicli.



Uno di questi cicli coinvolge i nodi s, 2, 4, 3. Alterando la soluzione come indicato in figura si fa uscire dalla base la variabile x_{s3}: scegliendo δ = 1 questa si fissa infatti al valore di capacità 9.



Inoltre l'arco (4, 7) è saturo e togliendolo si elimina un altro ciclo. Gli archi (1,5), (1, 6), (6, 9), (9, 11) (aggiunti per coprire i nodi scoperti) insieme a quelli blu a tratto pieno formano un albero ricoprente B, e la soluzione così aggiornata (vedi figura seguente) risulta di base.



I potenziali si ricavano dalla formula $c_{ij} + y_i - y_j = 0$ per ogni $ij \in B$. Fissando arbitrariamente $y_s = 0$ si ha in sequenza:

$c_{s,2} + y_s - y_2 = 0 \rightarrow y_2 = 9$ $\quad$ $c_{2,4} + y_2 - y_4 = 0 \rightarrow y_4 = 20$ $\quad$ $c_{3,4} + y_3 - y_4 = 0 \rightarrow y_3 = 9$

$c_{3,5} + y_3 - y_5 = 0 \rightarrow y_5 = 17$ $\quad$ $c_{5,8} + y_5 - y_8 = 0 \rightarrow y_8 = 17$ $\quad$ $c_{8,10} + y_8 - y_{10} = 0 \rightarrow y_{10} = 24$

$c_{10,t} + y_{10} - y_t = 0 \rightarrow y_t = 24$ $\quad$ $c_{12,t} + y_{12} - y_t = 0 \rightarrow y_{12} = 24$ $\quad$ $c_{7,12} + y_7 - y_{12} = 0 \rightarrow y_7 = 15$

$c_{1,5} + y_1 - y_5 = 0 \rightarrow y_1 = 9$ $\quad$ $c_{1,6} + y_1 - y_6 = 0 \rightarrow y_6 = 22$ $\quad$ $c_{6,9} + y_6 - y_9 = 0 \rightarrow y_9 = 22$

$c_{9,11} + y_9 - y_{11} = 0 \rightarrow y_{11} = 34$

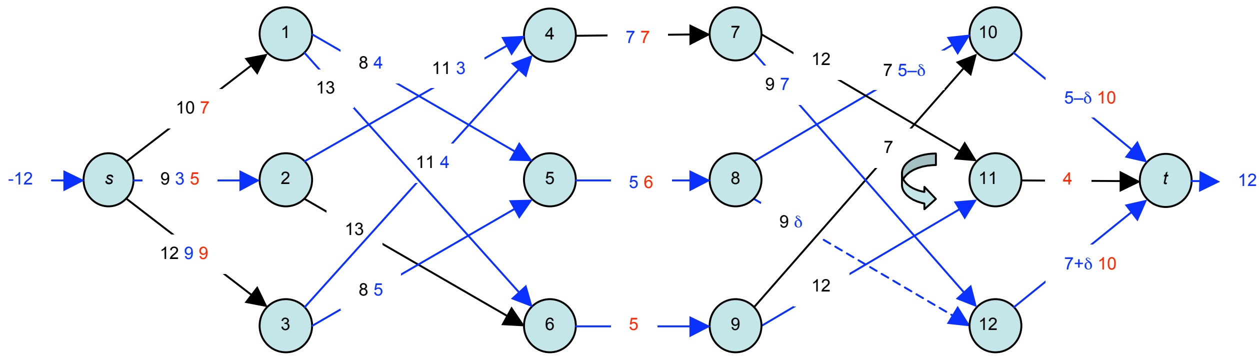
I costi ridotti fuori base valgono $c_{ij} + y_i - y_j\ \forall ij \notin B$. Quindi

$c_{s,3} + y_s - y_3 = 12 + 0 - 9 = 3$ $\quad$ $c_{2,6} + y_2 - y_6 = 13 + 9 - 22 = 0$ $\quad$ $c_{1,5} + y_1 - y_5 = 8 + 9 - 17 = 0$

$c_{4,7} + y_4 - y_7 = 0 + 20 - 15 = 5$ $\quad$ $c_{7,11} + y_7 - y_{11} = 12 + 15 - 34 = -7$ $\quad$ $c_{8,12} + y_8 - y_{12} = 9 + 17 - 24 = 2$

$c_{9,10} + y_9 - y_{10} = 7 + 22 - 24 = 5$ $\quad$ $c_{11,t} + y_{11} - y_t = 0 + 34 - 24 = 10$

Trattandosi di un problema di massimizzazione, conviene far entrare in base una variabile nulla con costo ridotto positivo, ovvero una satura con costo ridotto negativo. Il caso più favorevole si ha con $x_{11,t}$, ma il suo inserimento ci costringerebbe ad aggiornare un gran numero di dati. Conviene provare a inserire in base $x_{8,12}$, che è fissata alla soglia e ha costo ridotto 2, ma introduce un ciclo breve (4 archi).



Il valore massimo ammissibile per δ è 3 (dettato dalla capacità dell'arco (12, *t*)). Eseguendo l'aggiornamento la soluzione migliora di 2δ = 6, quindi quella proposta dal ragioniere non era ottima.