RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**
prova scritta del 12 febbraio 2009

1. Dite se il vettore (1, 1/4, –3/4) è combinazione affine, conica o convessa dei vettori (–1, 0, –2), (3, ½, ½) e (–½, 2, 1).

Il vettore (1, 1/4, –3/4) è combinazione convessa dei vettori (–1, 0, –2), (3, 1/2, 1/2) e (–1/2, 2, 1) con coefficienti 1/2, 1/2 e 0.

2. Risolvete il seguente problema di programmazione lineare con il metodo di Fourier-Motzkin, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & 2x_1 - 3x_2 \geq 5 \\ & -2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	z	≥
2	–3	**–1**	1	0
2	–3	**0**	0	5
–2	1	**–2**	0	2
1	0	**0**	0	0
0	1	**0**	0	0
0	0	**1**	0	0

x_1	x_2	x_3	z	≥
2	–3	0	1	0
2	–3	0	0	5
–2	1	0	0	2
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0

x_1	x_2	z	≥
0	**–2**	1	2
0	**–2**	0	7
0	**1**	0	2
0	**1**	0	0

x_2	z	≥
0	1	6
0	1	2
0	0	11
0	0	7

Dall'ultima tabella si ottiene 0 ≥ 11 e 0 ≥ 7 che sono chiaramente incompatibili. Dunque il problema è inammissibile.

3. Dato il seguente problema (P) di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \leq \frac{5}{2} \\ & -\frac{5}{2}x_1 + x_2 - 5x_3 \leq 3 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

sia **y** = (17/7, 2/7) una soluzione ammissibile del suo duale. Scrivete il duale (D) di (P) e, usando le condizioni di complementarità, dite se **y** è una soluzione ottima di (D).

Il problema duale è:

$$\min \quad \frac{5}{2}y_1 + 3y_2$$
$$2y_1 - \frac{5}{2}y_2 \geq \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{2}y_1 + y_2 \geq \frac{3}{2}$$
$$y_1 - 5y_2 \geq 1$$
$$y_i \geq 0 \quad i = 1,2$$

Le condizioni di complementarità sono:

$(5/2 - 2x_1 - 1/2x_2 - x_3)\ y_1 = 0$

$(3 + 5/2x_1 - x_2 + 5x_3)\ y_2 = 0$

$(2y_1 - 5/2y_2 - 3/2)\ x_1 = 0$

$(1/2y_1 + y_2 - 3/2)\ x_2 = 0$

$(y_1 - 5y_2 - 1)\ x_3 = 0$

Sostituendo i valori $y_1 = 17/7$, $y_2 = 2/7$ si ottiene $x_1^* = 0$, $x_2^* = 31/7$ e $x_3^* = 2/7$. Essendo $\mathbf{x}^*$ una soluzione ammissibile per il problema (P) si ha che $\mathbf{y}$ è soluzione ottima di (D).

4. Vecchio West

Al, Bill e Craig sono reduci da una rapina alla National Bank che ha fruttato un bel malloppo: 100.000 verdoni. Al è il capo e vuole per sé almeno i due terzi di quanto prenderanno insieme Bill e Craig; Craig vuol prendere almeno i due terzi di quello che prenderà Bill; Bill vuole prendere più che può. Qual è una soluzione che accontenta tutti? Trovatela risolvendo un PL col metodo del simplesso.

Semplice. Indicate con a, b e c le parti di Al, Bill e Craig il PL si scrive

$$\begin{array}{lrcl} \max & b & & \\ & a + b + c & = & 100 \\ & 2b - 3c & \leq & 0 \\ & -3a + 2b + 2c & \leq & 0 \\ & a, b, c & \geq & 0 \end{array}$$

Con due variabili di slack lo si porta in forma standard, e una variabile ausiliaria basta a definire il problema ausiliario per determinare una forma canonica:

$$\begin{array}{lrcl} \min & x & & \\ & a + b + c + x & = & 100 \\ & 2b - 3c + y & = & 0 \\ & -3a + 2b + 2c + z & = & 0 \\ & a, b, c & \geq & 0 \end{array}$$

Si ha:

a	b	c	x	y	z	
–1	–1	–1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	100
0	2	–3	0	1	0	0
–3	2	2	0	0	1	0

Con un pivot in riga 1 e colonna 1 si ottiene

a	b	c	x	y	z	
0	0	0	1	0	0	100
1	1	1	1	0	0	100
0	2	–3	0	1	0	0
0	5	5	3	0	1	300

corrispondente alla soluzione di base (degenere) $a = 100$, $b = c = 0$. La tabella canonica del problema è

a	b	c	y	z	
0	1	0	0	0	100
1	1	1	0	0	100
0	**2**	–3	1	0	0
0	5	5	0	1	300

Operando un pivot in riga 2 e colonna 2 si ha

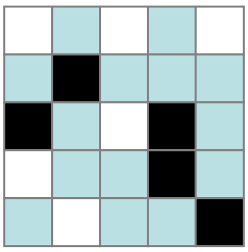
a	b	c	y	z	
0	0	$^3/_2$	–½	0	0
1	0	$^5/_2$	–½	0	100
0	1	$-^3/_2$	½	0	0
0	0	$\mathbf{^{25}/_2}$	$-^5/_2$	1	300

Con un pivot in riga 3 e colonna 3 si ricava infine la soluzione ottima

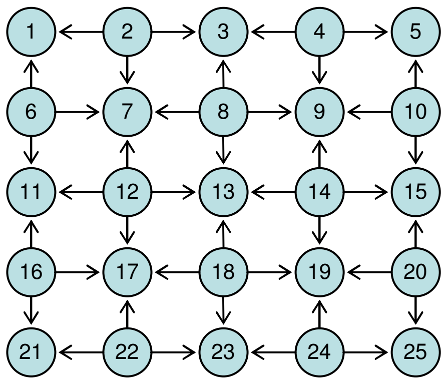
a	b	c	y	z	
0	0	0	$-^1/_5$	$-^3/_{25}$	–36
1	0	0	0	$-^1/_5$	40
0	1	0	$^1/_5$	$^3/_{25}$	36
0	0	1	$-^1/_5$	$^2/_{25}$	24

5. Domino

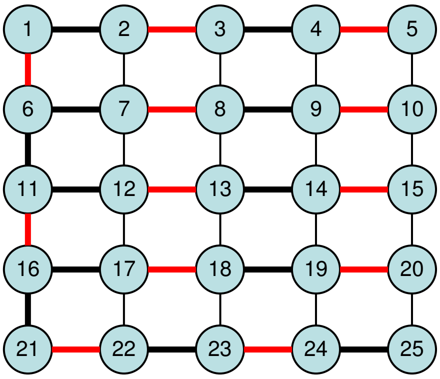
Si vogliono disporre tessere del domino sulla scacchiera raffigurata qui sotto. Ogni tessera occupa due celle quadrate della scacchiera, e si guadagnano punti a seconda del colore delle celle coperte: una cella bianca vale 1 punto, una grigia 2 punti e una nera 3 punti. Formulate il problema di disporre le tessere senza farle mai sovrapporre e massimizzando il punteggio ottenuto. Poi risolvetelo col metodo del simplesso su reti.

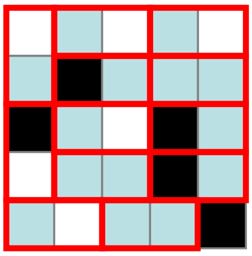


Basta associare alla scacchiera un grafo G con i nodi {1, 2, …, 25} corrispondenti alle celle della scacchiera. Ogni arco corrisponde a una coppia di celle adiacenti ed ha come peso la somma dei relativi punteggi. Ad esempio, associando numeri crescenti alle celle da sinistra verso destra e dall'alto in basso, l'arco 12 pesa 3 + 1 = 4, l'arco 67 pesa 1 – 2 = –1 e così via. Si noti che il grafo è bipartito, dal momento che è privo di cicli dispari: l'insieme dei nodi pari e quello dei nodi dispari sono evidentemente stabili.

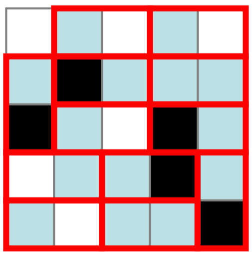


Il problema è un matching di peso massimo, che si riformula come flusso a costo minimo aggiungendo un nodo sorgente s e un nodo pozzo p, gli archi sj (j pari) e jt (j dispari) con capacità unitaria, e un arco di ritorno ts con capacità illimitata (questa costruzione è necessaria in quanto il grafo non ammette un matching perfetto). L'orientamento degli altri archi sarà dai nodi pari ai nodi dispari (vedi figura). Il costo degli archi che coinvolgono s o t è pari a 0, quello degli altri archi pari alla somma dei punteggi degli estremi cambiata di segno, e il problema consiste nel calcolare una circolazione di costo minimo. Siccome la matrice dei vincoli del problema è totalmente unimodulare ogni soluzione di base risulterà intera e, dal momento che gli archi aggiunti hanno capacità unitaria, avrà valori 0-1: come è facile verificare, il sottovettore corrispondente agli archi della griglia è caratteristico di un matching di G. Una base corrisponde a un qualunque insieme di archi che forma un albero ricoprente G. Ad esempio si può scegliere come base iniziale l'insieme B_0 corrispondente agli archi a tratto grosso nella figura seguente (a sinistra). Una soluzione ammissibile di base si ha ponendo $x_{16} = x_{11,16} = x_{23} = x_{45} = \ldots = x_{21,22} = x_{23,24} = 1$ (archi colorati, variabili non fissate agli estremi) e $x_{12} = x_{34} = x_{6,11} = x_{16,21} = \ldots = x_{22,23} = x_{24,25} = 0$ (archi neri, variabili fissate all'estremo inferiore). La disposizione delle tessere associata a questo matching, di peso 46, è visibile nella figura a destra.





Un'operazione di pivot comporta l'introduzione di un arco entrante in base, con conseguente formazione di un ciclo da eliminare selezionando un opportuno arco uscente. L'arco entrante va scelto in base ai costi ridotti: ad esempio risulta favorevole inserire l'arco {20, 25}. Il ciclo introdotto è formato da quest'arco e da {16, 17}, {17, 18}, {18, 19} ,{19, 20}, {16, 21}, {21, 22}, {22, 23}, {23, 24}, {24, 25}. L'operazione conduce alla nuova soluzione indicata nella figura successiva, che, con un peso pari a 48, risulta chiaramente ottima.



6. Domino 2 (la vendetta)

Stavolta parliamo del domino classico: sulla solita scacchiera vogliamo disporre le ben note tessere rettangolari, contrassegnate ai due estremi da numeri compresi tra 1 e 6. Ogni tessera

a. occupa una coppia di celle adiacenti alla scacchiera
b. va posizionata accostando un suo lato a quello di un'altra già posizionata (due tessere possono anche avere i lati lunghi interamente coincidenti)
c. può essere accostata a un'altra solo se i numeri corrispondenti a uno degli estremi che si toccano sono uguali

La sola differenza col domino tradizionale è che, siccome i numeri sulle tessere sono quelli arabi, le tessere non possono essere capovolte: ognuna ha cioè ben associato il suo numero di sinistra e il suo numero di destra, ed è quindi identificata da una coppia ordinata (a, b). Indichiamo le celle della scacchiera con dei numeri interi (vedi figura) e supponiamo di voler usare una variabile 0-1 x_{up} per dire che la tessera $u = (a, b)$ è stata posizionata sulla coppia di celle $p = (i, j)$ con il numero di sinistra, a, posto sulla cella i e il numero di destra, b, posto sulla cella j (per convenzione supponiamo sempre $i < j$).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Come si esprime un vincolo che obblighi la variabile associata a $p = (12, 13)$ e $u = (1, 5)$ a rispettare il terzo requisito?

Indichiamo con $Q(j)$ l'insieme delle coppie di celle adiacenti $q = (w, z)$ con z adiacente a j, $z \neq i$, $w < z$.

6	7	8	9	
11	12	13	14	
16	17	18	19	

Ad esempio, con riferimento alla figura e alla coppia $p = (12, 13)$ si ha

$$Q(13) = \{(7, 8), (9, 14), (17, 18)\}$$

Analogamente indichiamo con $R(j)$ l'insieme delle celle $r = (w, z)$ con w adiacente a j, $w \neq i$, $w < z$. Sempre con riferimento alla figura si ha quindi

$$R(13) = \{(8, 9), (14, 19), (18, 19)\}$$

Siano poi $S(k)$ e $T(k)$ gli insiemi delle tessere della forma $s = (y, b)$ e $t = (b, y)$, rispettivamente, con y qualsiasi. Nel nostro caso, $b = 5$, si ha

$$S(5) = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\} \qquad T(5) = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}.$$

Definiamo in modo analogo $Q(i)$, $R(i)$, $S(a)$ e $T(a)$ relativamente all'adiacenza alla cella i e a tessere della forma $s = (y, a)$ e $t = (a, y)$. Nel nostro esempio si ha quindi

$$Q(12) = \{(6, 7), (6, 11), (16, 17)\} \qquad R(12) = \{(7, 8), (11, 16), (17, 18)\}$$

$$S(1) = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\} \qquad T(1) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$$

Il vincolo deve costringere x_{up} a valere 0 se non vi è alcuna tessera s o t in posizione q o r opportuna:

$$x_{up} \leq \sum_{q\in Q(j),\, s\in S(b)} x_{qs} + \sum_{r\in R(j),\, t\in T(b)} x_{rt} + \sum_{q\in Q(i),\, s\in S(a)} x_{qs} + \sum_{r\in R(i),\, t\in T(a)} x_{rt}$$