RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 22 gennaio 2009

1. Dite se il vettore (5/4, –1, 1) è combinazione affine, conica o convessa dei vettori (1/2, 0, 1), (–1, 2, 1) e (1/2, 1/2, –3).

Il vettore (5/4, –1, 1) è combinazione affine dei vettori (1/2, 0, 1), (–1, 2, 1) e (1/2, 1/2, –3) con coefficienti 3/2, –1/2 e 0.

2. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
–2	–3	–1	1	0
1	–2	–1	0	2
0	1	3	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\geq$
0	–7	**–3**	1	4
0	–3	**–1**	1	0
0	1	**3**	0	1
0	1	**0**	0	0
0	0	**1**	0	0

x_2	x_3	z	$\geq$
–6	0	1	5
–7	0	1	4
–8	0	3	1
–3	0	1	0
1	0	0	0

x_2	z	$\geq$
0	1	5
0	1	4
0	3	1
0	1	0

Dall'ultima tabella si ottiene $z \geq 5$. Poiché il problema è di minimo sarà $z = 5$. Dalla penultima tabella sostituendo $z = 5$ si ottiene $x_2 = 0$. Dalla terzultima tabella si ottiene $x_3 = 1/3$ e dalla prima $x_1 = 7/3$.

3. Dato il seguente problema (P) di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \geq 2 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

sia **y** = (5/6, 1/3) una soluzione ammissibile per il problema duale associato a (P). Scrivete il problema duale (D) di (P) e usando le condizioni di complementarità dite se **y** è una soluzione ottima di (D).

Il problema duale è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3y_1 + 2y_2 \\ & y_1 - 2y_2 \le 2 \\ & -2y_1 + 2y_2 \le -1 \\ & y_1 + \frac{1}{2}y_2 \le 1 \\ & y_i \ge 0 \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

Le condizioni di complementarità sono:

$(x_1 - 2x_2 + x_3 - 3)\, y_1 = 0$

$(-2x_1 + 2x_2 + 1/2x_3 - 2)\, y_2 = 0$

$(2 - y_1 + 2y_2)\, x_1 = 0$

$(-1 + 2y_1 - 2y_2)\, x_2 = 0$

$(1 - y_1 - 1/2y_2)\, x_3 = 0$

Sostituendo i valori $y_1 = 5/6$, $y_2 = 1/3$ si ottiene $x_1 = 0$, $x_2 = 1/6$ e $x_3 = 10/3$. Essendo $\mathbf{x}$ una soluzione ammissibile per il problema (P) si ha che $\mathbf{y}$ è soluzione ottima di (D).

4. 4. Meno tasse per tutti

Nel mio paese le imposte si pagano con un imposta progressiva, crescente per scaglioni di reddito. Si inizia con una quota esente: se il reddito annuo lordo non supera i 5.000€ non si paga niente; su ogni euro di reddito in più, e fino a un totale di 15.000€ annui, si paga un'aliquota del 30%; sullo scaglione di reddito successivo, fino ai 35.000€, si paga il 35%; per ogni euro di reddito oltre i 35.000 si paga il 40%. Per fare un esempio, il mio reddito è di 40.000€, e su questi pagherò la cifra seguente: 0,00x5.000 + 0,30x10.000 + 0,35x20.000 + 0,40x(40.000 – 35.000) = 12.000€. Per la verità in famiglia i titolari di reddito sono tre, mia moglie, mia suocera e il sottoscritto: mia moglie prende 23.000€ annui lordi, e la pensione lorda di mia suocera conta per altri 15.000. Ora il mio commercialista sostiene che le imposte da pagare corrispondono alla soluzione ottima di un problema di flusso a costo minimo su un grafo opportuno. Ma io mi chiedo

1. Qual è questo grafo, e come si formula il problema?
2. E non può capitare una soluzione nella quale io, mia moglie e mia suocera paghiamo l'aliquota massima del 40% su tutto il nostro reddito? Il mio commercialista dice che non è importante, perché con un po' di operazioni di pivot si arriva sempre alla soluzione giusta. Mi fate vedere una di queste operazioni? E la soluzione che temo io, è di base o no?
3. Lo stesso metodo, dice il commercialista, può essere usato per dedurre le spese sanitarie dal reddito di ciascuno: nel mio caso, siamo liberi di decidere a chi attribuire le spese, che nell'anno ammontano complessivamente a 4.000 euro. Per trovare il modo più conveniente di distribuirle, tenuto conto che al massimo si possono dedurre 2.500 euro per persona fisica, il commercialista dice che basta modificare di poco il grafo. Come?

1. Il grafo ha tre nodi sorgente *a*, *b*, *c*: uno per me, uno per mia moglie e uno per mia suocera. In ciascuno di questi nodi entra un flusso pari al reddito corrispondente. Vi sono poi altri quattro nodi, corrispondenti alla quota esente e alle tre aliquote. I primi tre nodi sono collegati agli altri quattro con degli archi in tutti i modi possibili. Vi è infine un nodo pozzo *p* al quale sono collegati i secondi quattro nodi, e dal quale fuoriesce un flusso pari alla somma dei flussi di ingresso. Il generico arco *ij* ha capacità pari alla differenza tra lo scaglione di reddito associato al nodo *j* e quello associato al nodo *j* – 1: per esempio, l'arco *a*1 ha capacità 5.000 (pari al limite superiore del primo scaglione); l'arco *a*3 ha capacità pari a 35.000 (limite superiore del terzo scaglione) meno 15.000 (limite superiore del secondo scaglione), cioè 20.000; l'arco *b*4 ha capacità infinita in quanto non vi è limite superiore al reddito del quarto e ultimo scaglione. Passare attraverso questi archi non comporta costi. Tutto il flusso che passa invece per gli archi di tipo *jp* ha un costo c_j corrispondente all'aliquota applicata allo scaglione *j*: ad esempio l'arco 4*p* ha costo c_4 = 0,40. Questi quattro archi hanno capacità infinita. Il problema si formula quindi

$$\begin{aligned} \min \quad & 0{,}30x_{2p} + 0{,}35x_{3p} + 0{,}40x_{4p} \\ & x_{a1} + x_{a2} + x_{a3} + x_{a4} = 40.000 \end{aligned}$$

$x_{b1} + x_{b2} + x_{b3} + x_{24} = 23.000$

$x_{c1} + x_{c2} + x_{c3} + x_{34} = 12.000$

$x_{a1} + x_{b1} + x_{c1} = \mathrm{x}_{1p}$

$x_{a2} + x_{b2} + x_{c2} = \mathrm{x}_{2p}$

$x_{a3} + x_{b3} + x_{c3} = \mathrm{x}_{3p}$

$x_{a4} + x_{b4} + x_{c4} = \mathrm{x}_{4p}$

$x_{1\mathrm{p}} + x_{2\mathrm{p}} + x_{3\mathrm{p}} = 75.000$

$x_{i1} \leq 5.000,\ x_{i2} \leq 10.000,\ x_{i3} \leq 20.000$ $\qquad i = a, b, c$

$x_{ij} \geq 0$ $\qquad$ per ogni arco ij

2. Effettivamente quella descritta è una soluzione ammissibile, corrispondente a $x_{a4} = 40.000$, $x_{b4} = 23.000$, $x_{c4} = 12.000$, $x_{4p} = 75.000$ e $x_{ij} = 0$ per tutti gli altri archi ij. È anche una soluzione di base (degenere), in quanto le x_{ij} non fissate alla soglia o alla capacità dell'arco ij non superano le $n - 1 = 7$ (n = numero di nodi del grafo). Per verificarne la non ottimalità basta calcolarne il costo ridotto. Si procede quindi al calcolo dei potenziali associati ai nodi in una base associata alla soluzione data. Siccome una base corrisponde a un albero ricoprente, essa deve contenere 7 archi. Bisogna quindi aggiungere tre nuovi archi agli archi con flusso positivo in modo da non formare cicli: ad esempio $a1$, $a2$, $a3$. In generale i potenziali y_i devono soddisfare le equazioni $y_j - y_i = c_{ij}$ per gli archi ij appartenenti alla base, cioè

   $y_1 - y_a = 0$ $\qquad y_2 - y_a = 0$ $\qquad y_3 - y_a = 0$ $\qquad y_4 - y_a = 0$

   $y_4 - y_b = 0$ $\qquad y_4 - y_c = 0$ $\qquad y_p - y_4 = 0{,}4$

   Ponendo arbitrariamente a 0 il potenziale y_4 del nodo 4 si ha in sequenza: $y_p = 0{,}4$, $y_1 = y_2 = y_3 = y_a = y_b = y_c = 0$. Con questi valori si verifica ad esempio che il costo ridotto c_1' è pari $c_1 + y_1 - y_p = -0{,}4$. Inserendo l'arco $1p$ in base si forma il ciclo $\{a1, 1p, 4p, a4\}$. Sommando alla soluzione corrente la circolazione $x_{a1} = x_{1p} = 5.000$, $x_{4p} = x_{a4} = -5.000$ si ha che la variabile x_{a1} esce dalla base in quanto il flusso corrispondente satura la capacità dell'arco. La nuova soluzione migliora evidentemente quella precedente di 0,4x5.000€.

3. Semplicemente aggiungendo un nuovo nodo pozzo q dove confluiscono tre archi uscenti dai nodi a, b e c. La domanda nel nodo q è fissata a –4.000 (pari alla somma da dedurre per le spese mediche), e ogni arco iq ha capacità 2.500, soglia 0 e costo di attraversamento nullo. È evidente che ogni flusso che passi attraverso l'arco iq verrà dedotto, ai fini dell'imposta, dal reddito complessivo della persona fisica i.

5. Cronache marziane

Alfa, Beta e Gamma sono tre mercanti marziani che, per rifornire i propri negozi, si sono incontrati a fare affari su un pianeta interno di Betelgeuse. Alfa ha un bel carico di xilofoni, Beta un'astronave piena di ysotopi e Gamma può fornire un gran numero di zibaldoni. Dopo lunga contrattazione i tre si accordano come riportato nella tabella seguente, dove l'incrocio tra la riga i e la colonna j fornisce il numero di oggetti che i deve fornire a j in cambio di un oggetto fornito da j a i: ad esempio, in cambio di un ysotopo fornito da Beta, Alfa deve dargli 1,5 xilofoni (incrocio tra riga 1 e colonna 2), e in cambio di uno zibaldone fornito da Gamma, Alfa gli dovrà dare 0,4 xilofoni (incrocio tra riga 1 e colonna 3). La riga sotto la tabella indica il numero di xilofoni, ysotopi e zibaldoni stivati dai tre marziani nelle rispettive astronavi.

	Alfa	*Beta*	*Gamma*
Alfa		1,5	0,4
Beta	0,8		1,4
Gamma	1,3	0,5	

disponibilità	3000	2000	3000
	Xilofoni	*Ysotopi*	*Zibaldoni*

Ciascun marziano può ovviamente fornire agli altri due un quantitativo di oggetti non superiore alla propria disponibilità. Alfa si chiede se riuscirà a scambiare tutta la propria merce. Formulate il problema come programmazione lineare usando variabili x_{ij} che indicano il numero di oggetti che i fornisce a j e mostrate come portarlo in forma canonica mediante il simplesso, avviando il calcolo di una prima soluzione di base.

Con la notazione suggerita è immediato scrivere

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_{\alpha\beta} + x_{\alpha\gamma} \\
& x_{\alpha\beta} + x_{\alpha\gamma} = 1{,}5x_{\beta\alpha} + 0{,}4x_{\gamma\alpha} \le 3000 \\
& x_{\beta\alpha} + x_{\beta\gamma} = 0{,}8x_{\alpha\beta} + 1{,}4x_{\gamma\beta} \le 2000 \\
& x_{\gamma\alpha} + x_{\gamma\beta} = 1{,}3x_{\alpha\gamma} + 0{,}5x_{\beta\gamma} \le 3000 \\
& x_{\alpha\beta}, x_{\alpha\gamma}, x_{\beta\alpha}, x_{\beta\gamma}, x_{\gamma\alpha}, x_{\gamma\beta} \ge 0
\end{aligned}
$$

Il problema si pone facilmente in forma standard aggiungendo 6 variabili di slack $w_1, \ldots, w_6 \ge 0$ e risolvendo un problema ausiliario nel quale si minimizza $w_4 + w_5 + w_6$:

$x_{\alpha\beta}$	$x_{\alpha\gamma}$	$x_{\beta\alpha}$	$x_{\beta\gamma}$	$x_{\gamma\alpha}$	$x_{\gamma\beta}$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
–2	3	5	–5	–6	4	0	0	0	0	0	0	0
0	0	15	0	4	0	1	0	0	0	0	0	30000
8	0	0	0	0	14	0	1	0	0	0	0	20000
0	13	0	5	0	0	0	0	1	0	0	0	30000
10	10	–15	0	–4	0	0	0	0	1	0	0	0
–8	0	10	10	0	–14	0	0	0	0	1	0	0
0	–13	0	–5	**10**	10	0	0	0	0	0	1	0

La base iniziale è degenere. Eseguendo un'operazione di pivot in quinta colonna si fa uscire w_6 dalla base:

$x_{\alpha\beta}$	$x_{\alpha\gamma}$	$x_{\beta\alpha}$	$x_{\beta\gamma}$	$x_{\gamma\alpha}$	$x_{\gamma\beta}$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
–2	–4,8	5	–2	0	10	0	0	0	0	0	0,6	0
0	5,2	15	2	0	–4	1	0	0	0	0	–0,4	30000
8	0	0	0	0	14	0	1	0	0	0	0	20000
0	13	0	5	0	0	0	0	1	0	0	0	30000
10	15,2	–15	–2	0	4	0	0	0	1	0	0,4	0
–8	0	10	10	0	–14	0	0	0	0	1	0	0
0	–1,3	0	–0,5	1	1	0	0	0	0	0	0,1	0

Un'analoga operazione in prima colonna fa uscire w_4:

$x_{\alpha\beta}$	$x_{\alpha\gamma}$	$x_{\beta\alpha}$	$x_{\beta\gamma}$	$x_{\gamma\alpha}$	$x_{\gamma\beta}$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
0	–1,76	2	–2,4	0	10,8	0	0	0	0,2	0	0,68	0
0	5,2	15	2	0	–4	1	0	0	0	0	–0,4	30000
0	–12,16	12	1,6	0	10,8	0	1	0	–0,8	0	–0,32	20000
0	13	0	5	0	0	0	0	1	0	0	0	30000
1	1,52	–1,5	–0,2	0	0,4	0	0	0	0,1	0	0,04	0
0	12,16	–2	**8,4**	0	–10,8	0	0	0	0,8	1	0,32	0
0	–1,3	0	–0,5	1	1	0	0	0	0	0	0,1	0

Infine eseguendo un pivot in quarta colonna si può far uscire dalla base la variabile w_4 ottenendo una prima soluzione di base per il problema originale (i calcoli sono piuttosto complicati e non vengono riprodotti). A partire dalla base ottenuta si può ottenere la soluzione ottima reinserendo la funzione obiettivo iniziale con coefficienti 1 nelle prime due colonne e 0 altrove. Risolvendo si viene a sapere che Alfa potrebbe piazzare tutti e 3000 i suoi xilofoni vendendone 2500 a Beta e i rimanenti a Gamma. In questo modo anche Beta riuscirebbe a disfarsi di tutti i suoi ysotopi: 1800 andrebbero ad Alfa e gli altri 200 a Gamma. Quest'ultimo invece riuscirebbe a vendere solo 750 dei suoi 3000 zibaldoni: tutti ad Alfa e nessuno a Beta.

6. Due reti

Due ditte devono costruire una rete raccogliendo un insieme N di nodi in due sottoreti complete. Per ogni coppia di nodi i, j è noto il costo c_{ij} sostenuto per congiungerli con un link. Formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di assegnare a ciascuna ditta la realizzazione di una sottorete in modo che la differenza tra le lunghezze complessive dei link usati nelle due sottoreti sia minore possibile.

Si possono usare le seguenti variabili di decisione 0-1:

$x_i = 1$	se e solo se il nodo *i* è assegnato alla ditta 1
$x_{ij} = 1$	se e solo se il link *ij* è realizzato dalla ditta 1
$y_{ij} = 1$	se e solo se il link *ij* è realizzato dalla ditta 2

Con questa notazione i vincoli si scrivono:

$x_{ij} \leq (x_i + x_j)/2$	se non si assegnano entrambi i nodi alla ditta 1, questa non li collega
$x_{ij} \geq x_i + x_j - 1$	se si assegnano entrambi i nodi alla ditta 1, questa li deve collegare
$y_{ij} \leq 1 - (x_i + x_j)/2$	se il nodo i (o j) è assegnato alla ditta 1, la ditta 2 non lo collega a j (a i)
$y_{ij} \geq 1 - x_i - x_j$	se nessuno dei due nodi è assegnato alla ditta 1, la ditta 2 li deve collegare

Si noti che la seconda coppia di vincoli si ottiene dalla prima sostituendo $(1 - x_i)$ a x_i e $(1 - x_j)$ a x_j. La differenza tra i costi di collegamento, in valore assoluto, è pari a

$$D = \left|\sum_{i,j\in N} c_{ij}\, x_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, y_{ij}\right|$$

Minimizzare tale valore corrisponde a minimizzare la variabile reale D con gli ulteriori vincoli

$$D \geq \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, x_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, y_{ij} \qquad D = \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, y_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij}\, x_{ij}$$