RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 22 gennaio 2009

1. Dite se il vettore (5/2, 1, –13/2) è combinazione affine, conica o convessa dei vettori (1/2, 1/2, –3), (0, –1, 2) e (–3/2, 0, 1/2).

Il vettore (–5/2, 1, –13/2) è combinazione affine dei vettori (1/2, 1/2, –3), (0, –1, 2) e (–3/2, 0, 1/2) con coefficienti 2, 0 e –1.

2. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ & x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5 \\ & x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	z	$\ge$
3	2	**–1**	–1	0
–1	–1	**0**	0	–10
–1	–2	**1**	0	–5
1	0	**0**	0	0
0	1	**0**	0	0
0	0	**1**	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\ge$
2	0	0	–1	–5
3	2	0	–1	0
–1	–1	0	0	–10
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0

x_1	x_2	z	$\ge$
0	**–2**	–1	–25
0	**–1**	–1	–30
0	**–1**	0	–10
0	**1**	0	0

x_2	z	$\ge$
0	–1	–25
0	–1	–30
0	0	–10

Dall'ultima tabella si ottiene $z \le 25$. Poiché il problema è di massimo sarà z = 25. Dalla penultima tabella sostituendo z = 25 si ottiene x_2 = 0. Dalla terzultima tabella si ottiene x_1 = 10 e dalla prima x_3 = 5.

3. Dato il seguente problema (P) di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 1 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1/2 \\ & x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

sia **y** = (0, 3/2) una soluzione ammissibile per il problema duale associato a (P). Scrivete il problema duale (D) di (P) e usando le condizioni di complementarità dite se **y** è una soluzione ottima di (D).

Il problema duale è:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + \frac{1}{2} y_2 \\ & 2y_1 + y_2 \ge 1 \\ & 4y_1 + 3y_2 \ge 2 \\ & 2y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ & y_i \ge 0 \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

Le condizioni di complementarità sono:

$(1 - 2x_1 - 4x_2 - 2x_3)\, y_1 = 0$

$(1/2 - x_1 - 3x_2 - 2x_3)\, y_2 = 0$

$(2y_1 + y_2 - 1)\, x_1 = 0$

$(4y_1 + 3y_2 - 2)\, x_2 = 0$

$(2y_1 + 2y_2 - 3)\, x_3 = 0$

Sostituendo i valori $y_1 = 0$, $y_2 = 3/2$ si ottiene $x_1^* = x_2^* = 0$ e $x_3^* = 1/4$. Essendo $\mathbf{x}^*$ una soluzione ammissibile per il problema (P) si ha che $\mathbf{y}$ è soluzione ottima di (D).

4. **4. Come in una fiaba**

Biancaneve si è stufata di fare le sette faccende di casa: A) spazzare, B) rifare i letti, C) lavare i panni, D) cucire, E) stirare, F) cucinare, G) rigovernare. Così ha dato ai nani un ultimatum: o ci pensano loro o lei se ne va dalla strega. Brontolo, il più vecchio, ha l'incarico di assegnare una faccenda a ciascun nano. Per stimolare i fratelli ha deciso di dare a ciascuno la possibilità di venire pagato, e ha predisposto una tabella: il numero corrispondente all'incrocio tra una faccenda (riga) e un nano (colonna) indica i diamanti che il nano potrà prendere dalla cassa comune se quella faccenda gli verrà assegnata. Ogni nano può riempire la propria colonna a piacimento con numeri interi positivi, a patto che la somma dei numeri su ogni colonna non superi 10. Dopo che tutti i nani hanno fatto la loro scelta, la tabella ha l'aspetto seguente:

	1	2	3	4	5	6	7
A			4				
B		8	2		5		
C		2	2			2	
D	10			9	2	8	
E			2				
F				1			
G					3		10

Brontolo, che in quanto tirchio è anche il tesoriere, vuole assegnare le faccende minimizzando l'esborso complessivo. Aiutatelo nel modo seguente.

1. Formulate il problema in termini di flusso a costo minimo su un grafo opportuno.
2. Dite se la soluzione A1, B2, C3 D4 E5, F6, G7 è o no di base (in caso affermativo, specificare se è o no degenere). In caso negativo, eseguire un'operazione di pivot per renderla di base.
3. Verificare se la soluzione del punto 2 è ottima. In caso negativo, eseguire un'operazione di pivot per migliorarla.

1. Si tratta di determinare un matching di costo minimo sul grafo bipartito completo che ha per insieme di nodi l'insieme delle faccende F e quello dei nani N. L'arco uv è pesato col numero c_{uv} di diamanti da pagare se la faccenda u è assegnata al nano v. La formulazione si ottiene orientando gli archi dall'insieme delle faccende a quello dei nani e piazzando su ciascuno dei nodi-faccenda un'offerta unitaria, e una domanda unitaria su ciascun nodo-nano. Potendo supporre capacità indefinitamente grandi, il problema si formula:

$$\min \quad \sum_{uv\in F\times N} c_{uv}x_{uv}$$

$$\sum_{uv:v\in N} x_{uv} = 1 \qquad \forall u\in F$$

$$\sum_{uv:u\in F} x_{uv} = 1 \qquad \forall v\in N$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

2. Condizione necessaria e sufficiente perché una soluzione ammissibile sia di base è che abbia flusso fissato all'estremo inferiore (pari a 0) o superiore (pari alla capacità) in almeno $m - n + 1$ archi degli m esistenti fra gli n nodi del grafo. Nel caso in esame, $n = 14$, $m = 49$, $m - n + 1 = 34$. La soluzione indicata è di base in quanto ha flusso fissato all'estremo inferiore in $49 - 7 = 42 > 34$ archi: poiché il flusso è fissato agli estremi in $42 > 34$ archi, la soluzione è degenere.
3. Per valutare se la soluzione è o no ottima occorre calcolarne il costo ridotto. Si procede quindi al calcolo dei potenziali associati ai nodi in una base associata alla soluzione data. Siccome una base

corrisponde a un albero ricoprente, essa deve contenere 13 archi. Bisogna quindi aggiungere 7 nuovi archi agli archi con flusso unitario, ad esempio A2, B3, C4, D5, E6, F7. In generale i potenziali y_i devono soddisfare le equazioni $y_v - y_u = c_{uv}$, cioè

$y_1 - y_A = 0$	$y_2 - y_A = 0$	$y_2 - y_B = 8$	$y_3 - y_B = 2$
$y_3 - y_C = 2$	$y_4 - y_C = 0$	$y_4 - y_D = 9$	$y_5 - y_D = 2$
$y_5 - y_E = 0$	$y_6 - y_E = 0$	$y_6 - y_F = 0$	$y_7 - y_F = 0$

e infine $y_7 - y_G = 0$. Ponendo arbitrariamente a 0 il potenziale y_G del nodo G si ha in sequenza: $y_7 = y_F = y_6 = y_E = y_5 = 0$, $y_D = -2$, $y_4 = y_C = 7$, $y_3 = 9$, $y_B = 7$, $y_2 = y_A = y_1 = 15$. Con questi valori si verifica ad esempio che il costo ridotto c_{D2}' è pari a –17. Inserendo l'arco D2 in base si forma il ciclo {D2, B2, B3, C3, C4, D4}. Sommando alla soluzione corrente la circolazione $x_{D2} = x_{B3} = x_{C4} = 1$, $x_{B2} = x_{C3} = x_{D4} = -1$ si ha che la variabile x_{B2} (o x_{C3}, ovvero x_{D4}) esce dalla base in quanto il flusso corrispondente si annulla. La nuova soluzione migliora evidentemente quella precedente di 17 diamanti.

5. Befana sana

Ho chiesto le caramelle alla Befana, ma non vorrei sentirmi male. Il dietologo dice che non dovrei eccedere 30 grammi di zucchero, 20 di glucosio 50 di panna e 50 di miele al giorno. Rispondendo a una mia e-mail, la Befana mi ha detto che per le mie caramelle ha usato le seguenti ricette (tutte le quantità sono espresse in grammi, nell'ultima riga si legge il quantitativo di caramelle ottenuto con ciascuna ricetta).

	ricetta 1	**ricetta 2**	**ricetta 3**
zucchero	200	200	50
glucosio			125
panna	200	100	
miele	100		100
caramelle ottenute	**200**	**100**	**250**

Vorrei avere caramelle per tutto l'anno mangiandone il più possibile al giorno e mantenendomi nei limiti di quel menagramo del dietologo. Quante di ciascun tipo ne devo chiedere alla Befana? Datemi una mano: formulate un PL e risolvetelo col metodo del simplesso.

1. Bisogna anzitutto calcolare il contenuto di ciascun ingrediente in una caramella: per questo basta dividere ciascuna colonna della tabella per il numero di caramelle a cui si riferisce la ricetta corrispondente. Si ottiene

grammi di ingrediente per caramella

ingrediente	ricetta 1	ricetta 2	ricetta 3
zucchero	1	2	0,2
glucosio	0	0	0,5
panna	1	1	0
miele	0,5	0	0,4

2. Indicando con x_j il numero di caramelle di tipo j consumate in un giorno, con a_{ij} il contenuto di ingrediente i in una caramella di tipo j, e con b_i la quantità massima di ingrediente i che si può assumere in un giorno il problema si formula quindi

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + x_3 \\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \leq b_i \\ & \quad (\text{per } i = 1, \dots, 4) \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \max & x_1 + x_2 + x_3 & & \\ & 5x_1 + 10x_2 + x_3 & \leq & 150 \\ & x_3 & \leq & 40 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 50 \\ & x_1 + 2x_3 & \leq & 500 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

3. Il problema si pone facilmente in forma standard aggiungendo 4 variabili di slack $w_1, \dots, w_4$. La prima tabella canonica si scrive quindi:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
1	1	1	0	0	0	0	0
5	10	1	1	0	0	0	150
0	0	1	0	1	0	0	40
1	1	0	0	0	1	0	50
1	0	2	0	0	0	1	500

Eseguendo un'operazione di pivot in prima colonna si ricava

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
–1	–2	4/5	–1/5	0	0	0	–30
1	2	1/5	1/5	0	0	0	30
0	0	**1**	0	1	0	0	40
0	–1	–1/5	–1/5	0	1	0	20
0	–2	–1/5	–1/5	0	0	1	470

Eseguendo poi un'operazione di pivot in terza colonna si ha

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
–1	–2	0	–1/5	–4/5	0	0	–62
1	2	0	1/5	–1	0	0	22
0	0	1	0	1	0	0	40
0	–1	0	–1/5	1/5	1	0	28
0	–2	0	–1/5	1/5	0	1	478

La tabella è chiaramente ottima e corrisponde a una soluzione nella quale si consumano 22 caramelle del primo tipo e 40 del terzo ogni giorno. Fino alla prossima Befana fanno 22·365 = 8.030 del primo tipo e 40·365 = 14.600 del terzo: in totale, 22.630 caramelle – una calza bella pesante. Io cambierei dietologo…

6. Due reti

Due ditte devono costruire una rete raccogliendo un insieme N di nodi in due sottoreti complete. Per ogni coppia di nodi i, j è noto il costo c_{ij} sostenuto per congiungerli con un link. Formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di assegnare a ciascuna ditta la realizzazione di una sottorete in modo che la differenza tra le lunghezze complessive dei link usati nelle due sottoreti sia minore possibile.

Si possono usare le seguenti variabili di decisione 0-1:

$x_i = 1$ se e solo se il nodo i è assegnato alla ditta 1

$x_{ij} = 1$ se e solo se il link ij è realizzato dalla ditta 1

$y_{ij} = 1$ se e solo se il link ij è realizzato dalla ditta 2

Con questa notazione i vincoli si scrivono:

$x_{ij} \leq (x_i + x_j)/2$ se non si assegnano entrambi i nodi alla ditta 1, questa non li collega

$x_{ij} \geq x_i + x_j - 1$ se si assegnano entrambi i nodi alla ditta 1, questa li deve collegare

$y_{ij} \leq 1 - (x_i + x_j)/2$ se il nodo i (o j) è assegnato alla ditta 1, la ditta 2 non lo collega a j (a i)

$y_{ij} \geq 1 - x_i - x_j$ se nessuno dei due nodi è assegnato alla ditta 1, la ditta 2 li deve collegare

Si noti che la seconda coppia di vincoli si ottiene dalla prima sostituendo $(1 - x_i)$ a x_i e $(1 - x_j)$ a x_j. La differenza tra i costi di collegamento, in valore assoluto, è pari a

$$D = \left|\sum_{i,j\in N} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij} y_{ij}\right|$$

Minimizzare tale valore corrisponde a minimizzare la variabile reale D con gli ulteriori vincoli

$$D \geq \sum_{i,j\in N} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij} y_{ij} \qquad D = \sum_{i,j\in N} c_{ij} y_{ij} - \sum_{i,j\in N} c_{ij} x_{ij}$$