RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**
prova scritta dell'8 gennaio 2009

1. Dite se il vettore (–½, 3, 2) è combinazione affine, convessa o conica dei vettori (1, 0, ½), (–1, – ½ , ½) e (0, 2, –1).

Il vettore (–½, 3, 2) è combinazione conica dei vettori (1, 0, ½), (–1, – ½ , ½) e (0, 2, –1) con coefficienti 9/2, 5 e 11/4.

2. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvete il seguente problema di programmazione lineare, esibendo la soluzione ottima (qualora esista) e il suo valore, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \geq 6 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	z	≥
–1	–2	**–1**	1	0
1	1	**0**	0	10
–1	3	**–3**	0	6
1	0	**0**	0	0
0	1	**0**	0	0
0	0	**1**	0	0

x_1	x_2	x_3	z	≥
–1	**–2**	0	1	0
1	**1**	0	0	10
–1	**3**	0	0	6
1	**0**	0	0	0
0	**1**	0	0	0

x_1	x_2	z	≥
1	0	1	20
–5/2	0	3/2	6
1	0	0	0
–1	0	1	0

x_1	z	≥
0	4	56
0	2	20
0	3/2	6
0	1	0

Dall'ultima tabella si ottiene $z \geq 14$. Poiché il problema è di minimo sarà $z = 14$. Dalla penultima tabella sostituendo $z = 14$ si ottiene $x_1 = 6$. Dalla terzultima tabella si ottiene $x_2 = 4$ e dalla prima $x_3 = 0$.

3. Dato il seguente problema (P) di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 3/2 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 1/2 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

sia **y** = (1/4, 0) una soluzione ammissibile per il problema duale associato a (P). Scrivete il problema duale (D) di (P) e usando le condizioni di complementarità dite se **y** è una soluzione ottima di (D).

Il problema duale è:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tfrac{3}{2} y_1 + \tfrac{1}{2} y_2 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 + y_2 \leq 1 \\ & 4y_1 + 5y_2 \leq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Le condizioni di complementarità sono:

$(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3/2)\, y_1 = 0$

$(x_1 + x_2 + 5x_3 - 1/2)\, y_2 = 0$

$(2 - 2y_1 - y_2)\, x_1 = 0$

$(1 - 3y_1 - y_2)\, x_2 = 0$

$(1 - 4y_1 - 5y_2)\, x_3 = 0$

Sostituendo i valori $y_1 = 1/4$, $y_2 = 0$ si ottiene $x_1^* = x_2^* = 0$ e $x_3^* = 3/8$. Essendo $\mathbf{x}^*$ una soluzione ammissibile per il problema (P) si ha che $\mathbf{y}$ è soluzione ottima di (D).

4. Caduti nella rete

La topologia di una rete di comunicazione è rappresentata da una matrice di adiacenza nelle quale righe e colonne corrispondono ai nodi e il numero all'incrocio della riga i con la colonna j indica la capacità del link ij. Riferendosi alla matrice riportata qui sotto si vuole valutare la capacità disponibile, in assenza di traffico, per una comunicazione diretta dal nodo 1 al nodo 6.

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	20	24				
2		-	20	10	18		
3			-	24		22	
4	10			-	16	8	
5					-		30
6				20		-	
7						22	-

1. Formulate il problema in termini di flusso a costo minimo.
2. Dite se una soluzione ammissibile con flusso pari a 8 negli archi 12, 24, 46 e flusso nullo altrove è o no di base (in caso affermativo, specificate se è o no degenere). In caso negativo, eseguite un'operazione di pivot per renderla di base.
3. Verificate se la soluzione del punto 2 è ottima. In caso negativo, eseguite un'operazione di pivot per migliorarla.

1. La formulazione si ottiene aggiungendo un link dal nodo 6 al nodo 1 e chiedendo di determinare nel grafo risultante una circolazione non negativa che massimizzi il flusso nell'arco aggiunto rispettando tutti in vincoli di capacità:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_{61} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} \le \mathbf{x} \le (20, 24, 20, 10, 18, 24, 22, 10, 16, 8, 30, \infty, 20, 22) \end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} = (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{36}, x_{41}, x_{45}, x_{46}, x_{57}, x_{61}, x_{64}, x_{76})^T$ e $\mathbf{A} \in \{0, \pm 1\}^{n\times m}$ è la matrice di incidenza nodi-archi del grafo.

2. Condizione necessaria e sufficiente perché una soluzione ammissibile sia di base è che abbia flusso fissato all'estremo inferiore (pari a 0) o superiore (pari alla capacità) in almeno $m - n + 1$ archi degli m esistenti fra gli n nodi del grafo. Nel caso in esame, $m = 14$, $n = 7$, $m - n + 1 = 8$. La soluzione indicata è di base in quanto ha flusso fissato all'estremo inferiore in 11 archi, e flusso fissato all'estremo superiore nell'arco 46: poiché il flusso è fissato agli estremi in 12 > 8 archi, la soluzione è degenere.

3. Per valutare se la soluzione è o no ottima occorre calcolarne il costo ridotto. Si procede quindi al calcolo dei potenziali associati ai nodi in una base associata alla soluzione data, ad esempio quella corrispondente agli archi 12, 13, 24, 25, 57, 61 (si noti che non appena l'arco 61 ha flusso > 0, esso viene a far parte della base per non lasciarla più). In generale i potenziali y_i devono soddisfare le equazioni $c_{ij} + y_i - y_j = 0$, che per gli archi diversi da 61 si scrivono $y_j = y_i$, e per l'arco 61 invece $y_6 - y_1 = 1$. Ponendo arbitrariamente a 0 il potenziale y_1 del nodo 1 si ha: $y_6 = 1$, e $y_i = 0$ per ogni $i \neq 6$. Con questi valori si verifica ad esempio che il costo ridotto c_{76}' è pari a -1. Inserendo l'arco 76 in base si forma il ciclo {12, 25, 57, 76, 61}. Sommando alla soluzione corrente la circolazione $x_{12} = x_{25} = x_{57} = x_{76} = x_{61} = 18$ si ha che la variabile x_{25} esce dalla base in quanto il flusso corrispondente eguaglia la

capacità del link 25. La nuova soluzione migliora evidentemente quella precedente di 18 unità di flusso.

5. W la Befana

Per preparare le caramelle, come quelle che ha distribuito l'altroieri, la Befana normalmente va in rete a cercarsi qualche ricetta. Quest'anno ne ha trovate tre. Secondo la prima per fare 200 g di caramelle occorrono 200 g di zucchero, 200 di panna, 100 di miele. In accordo alla seconda, per farne un etto servono 200 g di zucchero, 2 cucchiai di succo di limone, 80 g di purea di frutta e 10 g di gelatina. La terza suggerisce invece 125 g di purea di frutta, 125 g di glucosio, 50 g di zucchero, 2,5 g di gelatina e 1 cucchiaio di succo di limone: e in questo modo si fanno 250 g di caramelle. In sintesi (e riportando tutto in grammi)

	ricetta 1	**ricetta 2**	**ricetta 3**	**prezzo**
zucchero	200	200	50	0,90 €/kg
glucosio			125	1,70 €/kg
panna	200			3,50 €/kg
miele	100			3,20 €/kg
succo limone		10	5	9,00 €/kg
purea di frutta		80	125	1,40 €/kg
gelatina		10	2,5	10,00 €/kg
quantità ottenuta	**200**	**100**	**250**	

Visti i prezzi delle materie prime, la buona vecchina ha pensato di farsi due conti: da bravi ingegneri sapreste aiutarla? Sì? Allora

1. Esprimete il costo totale degli ingredienti in funzione delle quantità x_1, x_2 e x_3 di caramelle da produrre secondo le tre ricette.
2. Supponendo di dover soddisfare una domanda complessiva di 10 tonnellate di caramelle (dei tre tipi), e che il mercato richieda che
   a. le caramelle alla frutta (ricette 2 e 3) costituiscano almeno i 3/5 del totale
   b. le caramelle pregiate (ricette 1 e 2) costituiscano almeno i 2/5 del totale

   formulate il problema di calcolare le quantità x_1^*, x_2^*, x_3^* che minimizzano il costo degli ingredienti necessari.
3. E se siete arrivati fin qui, calcolate con il metodo del simplesso il costo che si avrebbe all'ottimo.

1. Il costo va ovviamente riportato a una medesima unità di misura. Il costo per produrre un kg di caramelle con la ricetta 1 si ricava moltiplicando per 5 i dati in tabella: occorrono quindi 1 kg di zucchero, 1 kg di panna e ½ kg di miele. Allo stesso modo si vede che per produrre un kg di caramelle con la ricetta due servono 2 kg di zucchero, 0,1 kg di succo di limone, 0,8 kg di purea di frutta e 0,1 kg di gelatina. Infine usando la ricetta 3 un kg di caramelle richiede 0,2 kg di zucchero, 0,5 kg di glucosio, 0,02 kg di succo di limone, 0,5 kg di purea di frutta e 0,01 kg di gelatina. Riassumendo si ha la seguente tabella:

		quantità per kg di prodotto		
ingrediente	prezzo (€/kg)	ricetta 1	ricetta 2	ricetta 3
zucchero	0,90	1	2	0,2
glucosio	1,70	0	0	0,5
panna	3,50	1	0	0
miele	3,20	0,5	0	0
succo limone	9,00	0	0,1	0,02
purea di frutta	1,40	0	0,8	0,5
gelatina	10,00	0	0,1	0,01
	costo per kg di prodotto (€)	**6,00**	**4,82**	**2,01**

In definitiva, indicando con x_i i kg di caramelle prodotti con la ricetta i si ha per il costo complessivo:

$$c(x_1, x_2, x_3) \quad = \quad 6{,}00x_1 + 4{,}82x_2 + 2{,}01x_3$$

2. Il problema si formula quindi

$$\begin{array}{llllllll}
\min & 6{,}00x_1 & + & 4{,}82x_2 & + & 2{,}01x_3 & & \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10.000 \\
& & & x_2 & + & x_3 & \geq & 6.000 \\
& x_1 & + & x_2 & & & \geq & 4.000 \\
& & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

3. Poiché si richiede di calcolare solo il costo minimo, si può risolvere il problema duale (che è più facile da porre in forma standard):

$$\begin{array}{lllllll}
\max & 10.000y_1 & + & 6.000y_2 & + & 4.000y_3 & \\
& y_1 & & & + & y_3 & \leq 6 \\
& y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \leq 4{,}82 \\
& y_1 & + & y_2 & & & \leq 2.01 \\
& & & y_2, & & y_3 & \geq 0
\end{array}
\qquad \text{cioè} \qquad
\begin{array}{lllllll}
\max & 5y_1' - 5y_1'' & + & 3y_2 & + & 2y_3 & \\
& y_1' - y_1'' & & & + & y_3 & \leq 6 \\
& y_1' - y_1'' & + & y_2 & + & y_3 & \leq 4{,}82 \\
& y_1' - y_1'' & + & y_2 & & & \leq 2.01 \\
& & & y_1', y_1'', & y_2, & y_3 & \geq 0
\end{array}$$

dove la funzione obiettivo è stata divisa per 2.000. Aggiungendo 3 variabili di slack w_i si ottiene la tabella canonica

y_1'	y_1''	y_2	y_3	w_1	w_2	w_3	
5	–5	3	2	0	0	0	0
1	–1	0	1	1	0	0	6,00
1	–1	1	1	0	1	0	4,82
1	–1	1	0	0	0	1	2,01

Eseguendo un'operazione di pivot in prima colonna si ricava

y_1'	y_1''	y_2	y_3	w_1	w_2	w_3	
0	0	–2	2	0	0	–5	–10,05
0	0	–1	1	1	0	–1	3,99
0	0	0	1	0	1	–1	2,81
1	–1	1	**1**	0	0	1	2,01

Eseguendo poi un'operazione di pivot in quarta colonna si ha

y_1'	y_1''	y_2	y_3	w_1	w_2	w_3	
–2	2	–4	0	0	0	–7	–14,07
–1	1	–2	0	1	0	–2	1,98
–1	**1**	–1	0	0	1	–2	0,80
1	–1	1	1	0	0	1	2,01

Eseguendo infine un'operazione di pivot in seconda colonna si ottiene la tabella ottima

y_1'	y_1''	y_2	y_3	w_1	w_2	w_3	
0	0	–2	0	0	–2	–3	–15,67
0	0	–3	0	1	–1	–4	1,18
–1	1	–1	0	0	1	–2	0,80
0	0	0	1	0	1	–1	2,81

Moltiplicando il valore per 2.000 il valore nella casella in alto a destra e cambiandolo di segno si ha il costo minimo: 31.340 €.