Claudio Arbib
Università dell’Aquila

# Ricerca Operativa

## Poliedri:
## vertici e punti estremi

# Sommario

- Poliedri
- Diseguaglianze valide
  - Definizioni: iperpiani di supporto, facce, vertici, spigoli
  - Esempi
- Insiemi convessi, poliedri e punti estremi
- Vertici e punti estremi

# Poliedri

Definizione:

Siano $\mathbf{a} \in \mathrm{IR}^n$, $b \in \mathrm{IR}$. L'insieme

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n : \mathbf{a}\mathbf{x} = b\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

si dice iperpiano. L'insieme

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n : \mathbf{a}\mathbf{x} \leq b\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

si dice semispazio chiuso.

Definizione:

Un poliedro convesso è l'intersezione di un numero finito $m$ di semispazi chiusi di $\mathrm{IR}^n$.

Quindi $\forall$ $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^m$ l'insieme

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

definisce un poliedro. In particolare, $\emptyset$, $H$, $S$, $\mathrm{IR}^n$ sono poliedri.

# Diseguaglianze valide

Definizione:

Una diseguaglianza $\mathbf{ax} \leq b$ si dice valida per un poliedro $P \subseteq \mathrm{IR}^n$ se $P \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n: \mathbf{ax} \leq b\}$. L'insieme $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n: \mathbf{ax} = b\}$ si dice inoltre iperpiano di supporto di $P$.

Esempio:

Sia $P$ definito dalle disequazioni $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + 2x_2 \leq 4$

Le tre disequazioni che definiscono $P$ sono evidentemente valide

Altrettanto si può dire per la diseguaglianza $3x_1 + 4x_2 \leq 12$

La diseguaglianza $x_1 + x_2 \leq 3$ non è invece valida per $P$

# Diseguaglianze valide

Definizione:

Sia $P$ un poliedro di $\mathrm{IR}^n$ e $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n\colon \mathbf{ax} = b\}$ un suo iperpiano di supporto. Allora l'insieme $F = H \cap P$ si dice faccia di $P$.

Definizione:

Sia $F$ una faccia di un poliedro $P$.

Se $\dim(F) = 0$, allora $F = \{\mathbf{v}\}$, e il vettore $\mathbf{v}$ si dice vertice di $P$.

Se $\dim(F) = 1$, allora $F$ si dice spigolo di $P$.

Se infine $\dim(F) = \dim(P) - 1$, allora $F$ si dice faccia massimale di $P$.

# Esempi

Per ogni poliedro $P \neq \mathrm{IR}^n$, l'insieme $\varnothing$ è una faccia di $P$.

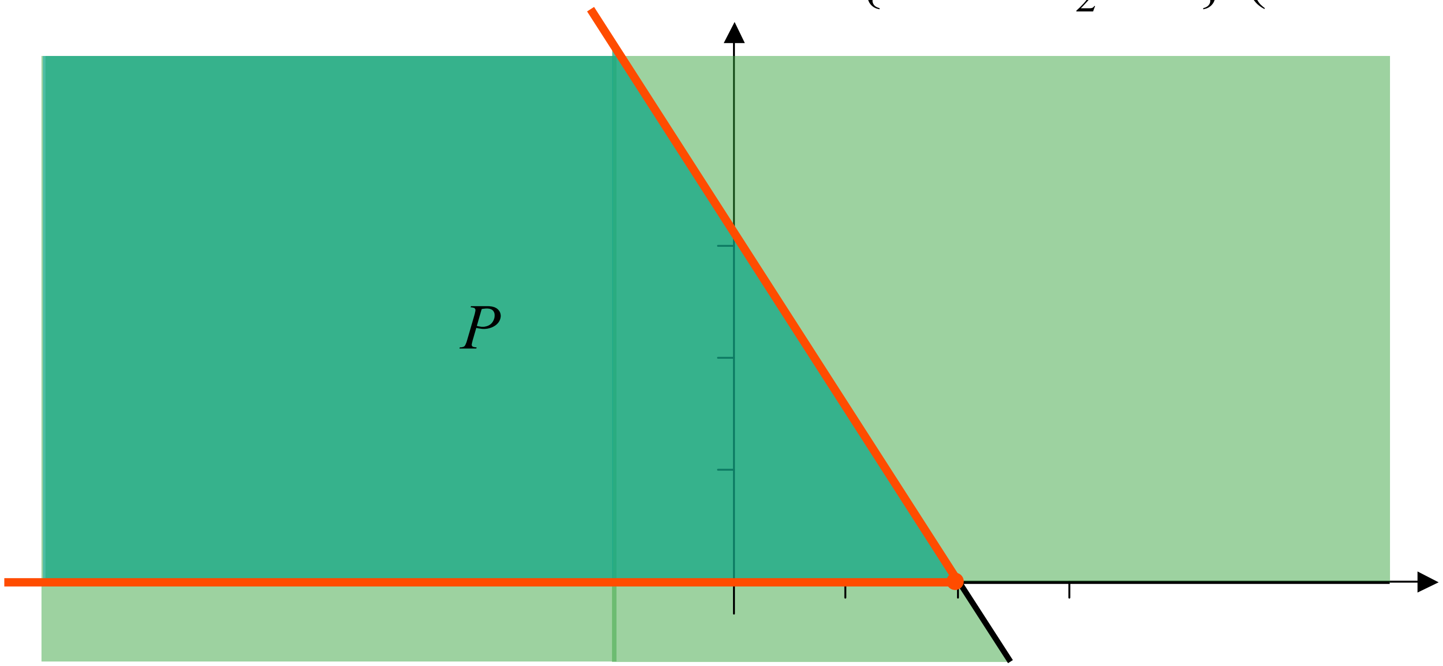
Sia $P$ definito dalle disequazioni $x_2 \geq 0$

$3x_1 + 2x_2 \leq 6$

Sono facce di $P$: il punto (2, 0) (vertice)

le semirette $\{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 : 3x_1 + 2x_2 = 6\}$

$\{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 : x_2 = 0\}$ (facce massimali)



# Insiemi convessi e punti estremi

Definizione:

Un insieme $Q \subseteq \mathrm{IR}^n$ si dice convesso se comunque si prendano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in Q$ ogni punto della forma $\alpha\mathbf{u} + (1 - \alpha)\mathbf{v}$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ appartiene ancora a $Q$.

Teorema:

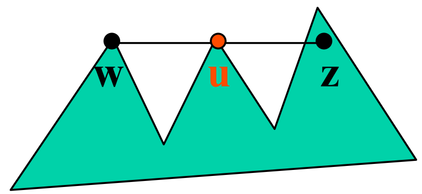
P(**A**, **b**) è effettivamente un insieme convesso.

Dim: $\mathbf{Au} \leq b$, $\mathbf{Av} \leq b \Rightarrow \mathbf{A}[\alpha\mathbf{u} + (1-\alpha)\mathbf{v}] = \alpha\mathbf{Au} + (1-\alpha)\mathbf{Av} \leq \alpha b + (1-\alpha)b = b$

Definizione:

Sia $Q$ convesso. Allora $\mathbf{x}$ si dice punto estremo di $Q$ se non esistono due punti distinti $\mathbf{w}$, $\mathbf{z} \in Q$ diversi da $\mathbf{x}$ e tali che $\mathbf{x} \in [\mathbf{w}, \mathbf{z}]$.

Nota: se $Q$ non è convesso cosa accade?



# Poliedri e punti estremi

Sia $P$ = P(**A**, **b**) $\subseteq$ IR$^n$, e sia $\mathbf{a}_i$ l'*i*-esima riga di **A**.

Dato $\mathbf{u} \in P$, alcune delle disequazioni di $P$ saranno soddisfatte da **u** con il segno "<", altre con il segno "=".

Sia $I(\mathbf{u})$ l'insieme degli indici di riga per i quali si ha $\mathbf{a}_i\mathbf{u} = b_i$.

Sia infine $\mathbf{A}_I$ (sia $\mathbf{b}_I$) la sottomatrice di **A** (di **b**) contenente le righe con indici in $I(\mathbf{u})$.

Teorema:

Il punto **u** è estremo per $P$ se e solo se rg($\mathbf{A}_I$) = $n$.

# Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad I(\mathbf{u}) = \{1, 3\}$$

$$\mathbf{A}_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(\mathbf{A}_I) = 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad$ **u** non è punto estremo di $P$

# Poliedri e punti estremi

Dimostrazione:

($\Leftarrow$) Per assurdo. Sia $\mathbf{u}$ estremo per $P$ ma $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_I) < n$. Allora il sistema omogeneo

$$\mathbf{A}_I\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ammette una soluzione non nulla $\mathbf{x}^*$. Poiché per def. di $I(\mathbf{u})$ si ha

$$\mathbf{a}_i\mathbf{u} < b_i \qquad\qquad i \notin I(\mathbf{u})$$

$\exists\varepsilon > 0$ tale che $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \varepsilon\mathbf{x}^*$ sono soluzioni di

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i \qquad\qquad i \notin I(\mathbf{u})$$

e inoltre per ogni $i \in I(\mathbf{u})$ si ha

$$\mathbf{a}_i\mathbf{w} = \mathbf{a}_i\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{a}_i\mathbf{x}^* = b_i$$

$$\mathbf{a}_i\mathbf{z} = \mathbf{a}_i\mathbf{u} - \varepsilon\mathbf{a}_i\mathbf{x}^* = b_i$$

da cui si deduce che $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ sono punti di $P$.

# Poliedri e punti estremi

Segue dimostrazione ($\Leftarrow$):

Inoltre evidentemente $\mathbf{w} \neq \mathbf{z}$, e $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{z}$. Quindi $\mathbf{u} \in [\mathbf{w}, \mathbf{z}]$, ma allora non è punto estremo.

($\Rightarrow$) Supponiamo ora che $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_I) = n$, ma $\mathbf{u}$ non sia estremo per $P$.

Quindi $\exists$ $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in P$, distinti e diversi da $\mathbf{u}$, tali che $\mathbf{u} \in (\mathbf{w}, \mathbf{z})$, cioè $\exists\alpha$ strettamente compreso tra 0 e 1 tale che $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{w} + (1-\alpha)\mathbf{z}$.

Siccome $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in P$, si ha $\mathbf{A}\mathbf{w} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{A}\mathbf{z} \leq \mathbf{b}$.

Ora, se per qualche $i \in I(\mathbf{u})$ si avesse $\mathbf{a}_i\mathbf{w} < b_i$ oppure $\mathbf{a}_i\mathbf{z} < b_i$ ne seguirebbe

$$\mathbf{a}_i\mathbf{u} = \mathbf{a}_i[\alpha\mathbf{w} + (1-\alpha)\mathbf{z}] = \alpha\mathbf{a}_i\mathbf{w} + (1-\alpha)\mathbf{a}_i\mathbf{z} < b_i$$

contraddicendo la def. di $I(\mathbf{u})$. Quindi $\mathbf{a}_i\mathbf{w} = b_i$ e $\mathbf{a}_i\mathbf{z} = b_i$ $\forall$ $i \in I(\mathbf{u})$. Ma allora $\mathbf{A}_I\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammetterebbe 2 soluzioni distinte, contraddicendo l'ipotesi su $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_I)$.

fine dimostrazione

# Corollari

Corollario 1:

Un punto estremo $\mathbf{u}$ di un poliedro $P$ è soluzione unica del sistema $\mathbf{A}_I\mathbf{x} = \mathbf{b}_I$.

Corollario 2: Un poliedro $P$ ha un numero finito di punti estremi.

Corollario 3: Un poliedro definito da una matrice $\mathbf{A}$ con meno righe che colonne non possiede punti estremi.

Esempio:

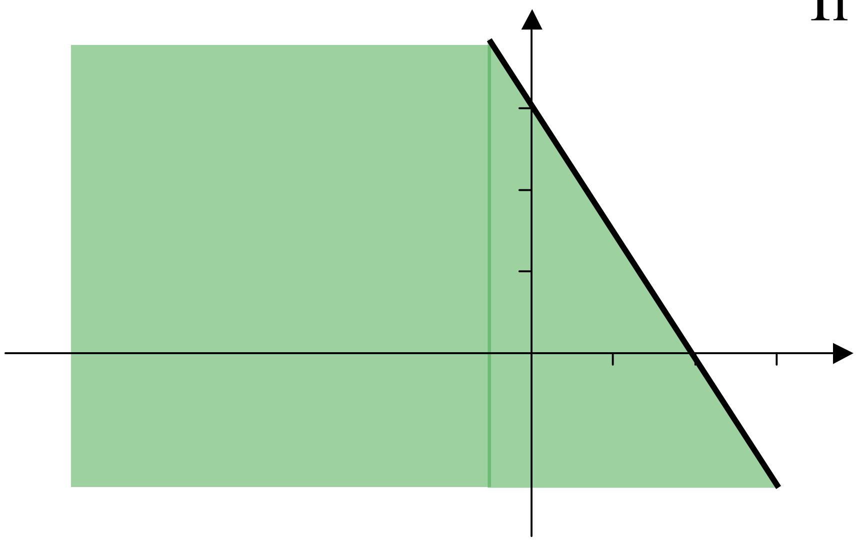
Il poliedro definito da

$$3x_1 + 2x_2 \le 6$$

non ha

punti

estremi



# Vertici e punti estremi

Teorema: Un vettore $\mathbf{u} \in P$ è punto estremo se e solo se è un vertice di $P$.

Dimostrazione:

($\Leftarrow$) Per assurdo. Se $\mathbf{u}$ è un vertice di $P$ allora esiste un iperpiano di supporto

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \colon \mathbf{hx} \leq k\}$$

tale che $H \cap P = \{\mathbf{u}\}$.

Se però $\mathbf{u}$ non è punto estremo, $P$ contiene $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ distinti e diversi da $\mathbf{u}$, ed $\exists \alpha$, $0 < \alpha < 1$ tale che

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{w} + (1-\alpha)\mathbf{z}.$$

Siccome $\mathbf{hx} \leq k$ è valida per ogni punto di $P$ e $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in P$, deve aversi

$$\mathbf{hw} < k \qquad \mathbf{hz} < k$$

(non vale il segno "=" perché $H \cap P = \{\mathbf{u}\}$, quindi $\mathbf{w}, \mathbf{z} \notin H$).

Combinando con coefficienti $\alpha$ e $(1-\alpha)$ si ha

$$\mathbf{hu} = \mathbf{h}[\alpha \mathbf{w} + (1-\alpha)\mathbf{z}] = \alpha \mathbf{hw} + (1-\alpha)\mathbf{hz} < k$$

che contraddice l'appartenenza di $\mathbf{u}$ a $H$.

# Vertici e punti estremi

Segue dimostrazione:

($\Rightarrow$) Sia ora $\mathbf{u}$ punto estremo di $P$. Mostriamo che esiste un iperpiano di supporto $H$ che con $P$ ha in comune solo $\mathbf{u}$.

Definiamo

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n: \mathbf{hx} = k\}$$

con $\mathbf{h} = \Sigma_{i\in I(\mathbf{u})}\mathbf{a}_i$, $k = \Sigma_{i\in I(\mathbf{u})}b_i$.

Chiaramente, $\mathbf{hx} \leq k$ è valida per $P$ (somma delle righe).

Inoltre $\mathbf{hu} = k$, dunque $H \cap P \supseteq \{\mathbf{u}\}$.

Facciamo vedere che $\mathbf{u}$ è l'unico elemento di $H \cap P$.

# Vertici e punti estremi

Segue dimostrazione ($\Rightarrow$):

Sia $\mathbf{y} \in H \cap P$. Si ha allora

$$\mathbf{a}_i\mathbf{y} \;\leq\; b_i \text{ per ogni } i \in I(\mathbf{u}) \qquad \text{(in quanto } \mathbf{y} \in P\text{)}$$

$$\mathbf{h}\mathbf{y} \;=\; k \qquad \text{(in quanto } \mathbf{y} \in H\text{)}$$

Dalla prima si ha $b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{y} \geq 0$. Dalla seconda $\Sigma_{i \in I(\mathbf{u})}[b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{y}] = 0$.

Poiché la somma di quantità non negative è nulla se tutte le quantità sono nulle, si ricava $b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{y} = 0$ per ogni $i \in I(\mathbf{u})$.

Quindi $\mathbf{y}$ è soluzione di

$$\mathbf{A}_I\mathbf{y} \;=\; \mathbf{b}_I$$

ma per il Corollario 1 poiché $\mathbf{u}$ è punto estremo, esso è anche l'unica soluzione di questo sistema.

Quindi $H \cap P = \{\mathbf{u}\}$.

fine dimostrazione