Formulazioni PL$\{0, 1\}$

Salvatore Nocella

Dipartimento di Informatica
Università di L'Aquila
http://www.oil.di.univaq.it/

9 febbraio 2007

Insieme stabile

Definition (Insieme stabile)

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, un sottoinsieme di vertici $S \subseteq V$ è un *insieme stabile* se $\forall uv \in E$, al più uno tra u e v appartengono ad S.

Insieme stabile

Definition (Insieme stabile)

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, un sottoinsieme di vertici $S \subseteq V$ è un *insieme stabile* se $\forall uv \in E$, al più uno tra u e v appartengono ad S.

Problem

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$ pesato sui nodi ($c : V \to \mathbb{R}_+$), formulare in termini di PL$\{0, 1\}$ il problema di trovare l'insieme stabile di peso massimo su G.

Insieme stabile

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = V$
- $\mathcal{F} = \{S \subseteq V \mid S$ è un insieme stabile$\}$
- $c : V \rightarrow \mathbb{R}_+$

Insieme stabile

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = V$
- $\mathcal{F} = \{S \subseteq V \mid S \text{ è un insieme stabile}\}$
- $c : V \to \mathbb{R}_+$

Variabili di decisione

$$\forall v \in V,\ x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ appartiene all'insieme stabile } S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Insieme stabile

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = V$
- $\mathcal{F} = \{S \subseteq V \mid S \text{ è un insieme stabile}\}$
- $c : V \to \mathbb{R}_+$

Variabili di decisione

$$\forall v \in V,\ x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ appartiene all'insieme stabile } S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

Per ogni arco $uv \in E$, al più uno dei suoi estremi può appartenere all'insieme stabile.

$$x_u + x_v \leqslant 1 \quad \forall uv \in E$$

Insieme stabile

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = V$
- $\mathcal{F} = \{S \subseteq V \mid S \text{ è un insieme stabile}\}$
- $c : V \to \mathbb{R}_+$

Variabili di decisione

$$\forall v \in V,\ x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ appartiene all'insieme stabile } S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\max \sum_{v \in V} c_v x_v$$

Alle Olimpiadi

Com'è noto, durante le Olimpiadi, gare di diverse specialità si svolgono in contemporanea (o comunque in periodi temporali non completamente distinti). Mario Rossi, giornalista sportivo per una nota testata nazionale, non avendo il dono dell'ubiquità deve scegliere quali eventi seguire. È chiaro che il sig. Rossi ad una gara eliminatoria preferirà una gara di finale (o comunque una di maggior interesse). Sfruttando un opportuno grafo, formulare in termini di ottimizzazione combinatoria il problema di scegliere il miglior gruppo di eventi che Mario Rossi può seguire personalmente.

Soluzione

Il grafo $G = (V, E)$

- V: l'insieme di tutti gli eventi
- E: l'insieme delle coppie di eventi uv che si svolgono in periodi di tempo non completamente distinti
- $c : V \rightarrow \mathbb{R}_+$: la funzione "*interesse*" di un certo evento

Soluzione

Il grafo $G = (V, E)$

- V: l'insieme di tutti gli eventi
- E: l'insieme delle coppie di eventi uv che si svolgono in periodi di tempo non completamente distinti
- $c : V \to \mathbb{R}_+$: la funzione "*interesse*" di un certo evento

Il problema diventa pertanto quello di trovare un insieme stabile di peso massimo sul grafo G.

Clique

Definition (Clique)

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, un sottoinsieme di vertici $Q \subseteq V$ forma una *clique* se $\forall u, v \in Q$, $uv \in E$.

Clique

Definition (Clique)

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, un sottoinsieme di vertici $Q \subseteq V$ forma una *clique* se $\forall u, v \in Q$, $uv \in E$.

Problem

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$ pesato sui nodi ($c : V \to \mathbb{R}_+$), formulare in termini di PL$\{0,1\}$ il problema di trovare la clique di peso massimo su G.

Clique di peso massimo

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = V$
- $\mathcal{F} = \{Q \subseteq V \mid Q \text{ è una clique}\}$
- $c : V \rightarrow \mathbb{R}_+$

Clique di peso massimo

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = V$
- $\mathcal{F} = \{Q \subseteq V \mid Q \text{ è una clique}\}$
- $c : V \to \mathbb{R}_+$

Variabili di decisione

$$\forall v \in V,\ x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ appartiene alla clique } Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Clique di peso massimo

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = V$
- $\mathcal{F} = \{Q \subseteq V \mid Q$ è una clique$\}$
- $c : V \to \mathbb{R}_+$

Variabili di decisione

$$\forall v \in V,\ x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ appartiene alla clique } Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

Per ogni coppia di vertici non adiacenti $uv \notin E$, al più uno di essi può appartenere alla clique.

$$x_u + x_v \leqslant 1 \quad \forall uv \notin E$$

Clique di peso massimo

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = V$
- $\mathcal{F} = \{Q \subseteq V \mid Q \text{ è una clique}\}$
- $c : V \to \mathbb{R}_+$

Variabili di decisione

$$\forall v \in V,\ x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ appartiene alla clique } Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\max \sum_{v \in V} c_v x_v$$

Vertex coloring

Definition (Colorazione)

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, si definisce *colorazione* una funzione $\chi : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V|\}$ che associa un colore a ciascun vertice, colorando vertici adiacenti con colori diversi.

Vertex coloring

Definition (Colorazione)

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, si definisce *colorazione* una funzione $\chi : V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$ che associa un colore a ciascun vertice, colorando vertici adiacenti con colori diversi.

Problem

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, formulare in termini di PL$\{0, 1\}$ il problema di trovare una colorazione di G che utilizzi il minor numero di colori.

Vertex coloring

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F})$

- $U = 2^V$
- $\mathcal{F} = \{\mathcal{S} \subseteq 2^V \mid \mathcal{S}$ è una partizione di V in insiemi stabili$\}$

Vertex coloring

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F})$

- $U = 2^V$
- $\mathcal{F} = \{\mathcal{S} \subseteq 2^V \mid \mathcal{S}$ è una partizione di V in insiemi stabili$\}$

Variabili di decisione

$$x_{vk} = 1 \text{ sse il vertice } v \text{ viene colorato con il colore } k$$

$$y_k = 1 \text{ sse il colore } k \text{ viene utilizzato}$$

Vertex coloring

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F})$

- $U = 2^V$
- $\mathcal{F} = \{\mathcal{S} \subseteq 2^V \mid \mathcal{S}$ è una partizione di V in insiemi stabili$\}$

Variabili di decisione

$$x_{vk} = 1 \text{ sse il vertice } v \text{ viene colorato con il colore } k$$

$$y_k = 1 \text{ sse il colore } k \text{ viene utilizzato}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_k y_k$$

Vertex coloring

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F})$

- $U = 2^V$
- $\mathcal{F} = \{\mathcal{S} \subseteq 2^V \mid \mathcal{S}$ è una partizione di V in insiemi stabili$\}$

Variabili di decisione

$$x_{vk} = 1 \text{ sse il vertice } v \text{ viene colorato con il colore } k$$

$$y_k = 1 \text{ sse il colore } k \text{ viene utilizzato}$$

Vincoli

- Ogni vertice deve essere colorato con esattamente un colore

$$\sum_k x_{vk} = 1 \quad \forall v \in V$$

- Vertici adiacenti non sono colorati con il medesimo colore

$$x_{uk} + x_{vk} \leqslant 1 \quad \forall uv \in E \forall k$$

- Colore utilizzato

$$y_k \geqslant x_{vk} \quad \forall v \in V, \forall k$$

Indice cromatico

L'indice cromatico di un grafo simmetrico $G = (V, E)$ è il più piccolo numero $\theta(G)$ di colori che è possibile assegnare agli elementi di E in modo che, per ogni $u \in V$, gli archi che toccano u ricevano colori tra loro differenti. Formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di calcolare $\Theta(G)$ per un generico grafo G.

Soluzione

Variabili di decisione

$$x_{ek} = 1 \text{ sse il colore } k \text{ è assegnato all'arco } e$$

$$y_k = 1 \text{ sse il colore } k \text{ viene utilizzato}$$

Soluzione

Variabili di decisione

$$x_{ek} = 1 \text{ sse il colore } k \text{ è assegnato all'arco } e$$

$$y_k = 1 \text{ sse il colore } k \text{ viene utilizzato}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_k y_k$$

Soluzione

Variabili di decisione

$$x_{ek} = 1 \text{ sse il colore } k \text{ è assegnato all'arco } e$$

$$y_k = 1 \text{ sse il colore } k \text{ viene utilizzato}$$

Vincoli

- ad ogni arco deve essere associato esattamente un colore

$$\sum_k x_{ek} = 1 \quad \forall e \in E$$

- due archi con un estremo in comune non possono avere lo stesso colore

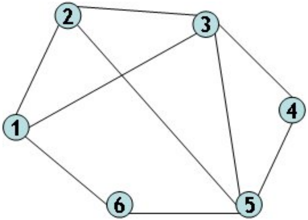
$$x_{ek} + x_{fk} \leqslant 1 \quad \forall k,\ \forall e, f \in E\ :\ e \cap f \neq \emptyset,\ e \neq f$$

- colore utilizzato

$$y_k \geqslant x_{ek} \quad \forall k,\ \forall e \in E$$

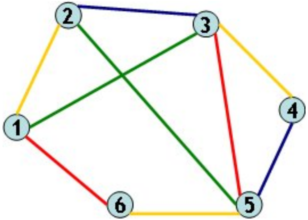
Un esempio

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$:



Un esempio

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$:

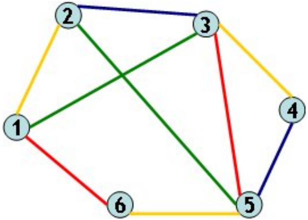


Formulazione

$$\min\ y_A + y_B + y_C + y_D + y_E + y_F + y_G + y_H + y_I$$

Un esempio

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$:



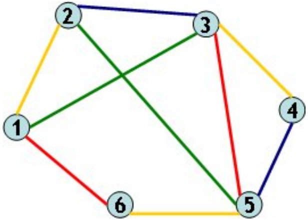
Formulazione

$$\min\ y_A + y_B + y_C + y_D + y_E + y_F + y_G + y_H + y_I$$

$$x_{12\,A} + x_{12\,B} + x_{12\,C} + x_{12\,D} + x_{12\,E} + x_{12\,F} + x_{12\,G} + x_{12\,H} + x_{12\,I} = 1$$
$$x_{23\,A} + x_{23\,B} + x_{23\,C} + x_{23\,D} + x_{23\,E} + x_{23\,F} + x_{23\,G} + x_{23\,H} + x_{23\,I} = 1$$
$$x_{45\,A} + x_{45\,B} + x_{45\,C} + x_{45\,D} + x_{45\,E} + x_{45\,F} + x_{45\,G} + x_{45\,H} + x_{45\,I} = 1$$
$$\ldots$$

Un esempio

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$:



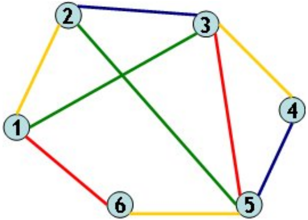
Formulazione

$$\min\ y_A + y_B + y_C + y_D + y_E + y_F + y_G + y_H + y_I$$

$$x_{12\,A} + x_{13\,A} \leqslant 1 \ \ldots\ x_{12\,I} + x_{13\,I} \leqslant 1$$
$$x_{65\,A} + x_{54\,A} \leqslant 1 \ \ldots\ x_{65\,I} + x_{54\,I} \leqslant 1$$
$$x_{25\,A} + x_{53\,A} \leqslant 1 \ \ldots\ x_{25\,I} + x_{53\,I} \leqslant 1$$
$$\ldots$$

Un esempio

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$:



Formulazione

$$\min\ y_A + y_B + y_C + y_D + y_E + y_F + y_G + y_H + y_I$$

$$y_A \geqslant x_{12\,A},\ y_A \geqslant x_{13\,A},\ y_A \geqslant x_{16\,A},\ \ldots,\ y_A \geqslant x_{56\,A}$$

$$y_B \geqslant x_{12\,B},\ y_B \geqslant x_{13\,B},\ y_B \geqslant x_{16\,B},\ \ldots,\ y_B \geqslant x_{56\,B}$$

$$\ldots$$

$$y_I \geqslant x_{12\,I},\ y_I \geqslant x_{13\,I},\ y_I \geqslant x_{16\,I},\ \ldots,\ y_I \geqslant x_{56\,I}$$

Edge cover

Definition (Edge cover)

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, un sottoinsieme di archi $C \subseteq E$ è un *edge cover* se $\forall v \in V$, $\exists ab \in E$ tale che $a = v$ oppure $b = v$.

Edge cover

Definition (Edge cover)

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, un sottoinsieme di archi $C \subseteq E$ è un *edge cover* se $\forall v \in V$, $\exists ab \in E$ tale che $a = v$ oppure $b = v$.

Problem (Minimum edge cover)

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$ pesato sugli archi ($c : E \to \mathbb{R}_+$), formulare in termini di PL$\{0, 1\}$ il problema di trovare il minimo edge cover di G.

Edge cover

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = E$
- $\mathcal{F} = \{C \subseteq V \mid C \text{ è un edge cover}\}$
- $c : E \to \mathbb{R}_+$

Edge cover

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = E$
- $\mathcal{F} = \{C \subseteq V \mid C \text{ è un edge cover}\}$
- $c : E \to \mathbb{R}_+$

Variabili di decisione

$$\forall uv \in E,\ x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } uv \text{ appartiene all'edge cover } C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Edge cover

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = E$
- $\mathcal{F} = \{C \subseteq V \mid C \text{ è un edge cover}\}$
- $c : E \to \mathbb{R}_+$

Variabili di decisione

$$\forall uv \in E,\ x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } uv \text{ appartiene all'edge cover } C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

Per ogni vertice $v \in V$, almeno un arco dell'edge cover C deve avere come estremo v.

$$\sum_{u \in V \,:\, uv \in E} x_{uv} \geqslant 1 \quad \forall v \in V$$

Edge cover

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = E$
- $\mathcal{F} = \{C \subseteq V \mid C$ è un edge cover$\}$
- $c : E \to \mathbb{R}_+$

Variabili di decisione

$$\forall uv \in E,\ x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } uv \text{ appartiene all'edge cover } C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

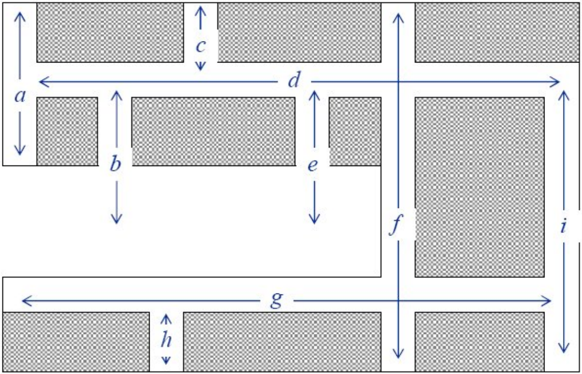
Funzione obiettivo

$$\min \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$$

Il Grande Fratello

Si vuole dotare un museo di un sistema di televisione a circuito chiuso che consenta la sorveglianza in assenza di personale. Sapendo che una telecamera posta all'incrocio di due corridoi è in grado, con opportune rotazioni, di sorvegliarli entrambi, qual è il minimo numero di telecamere necessarie?

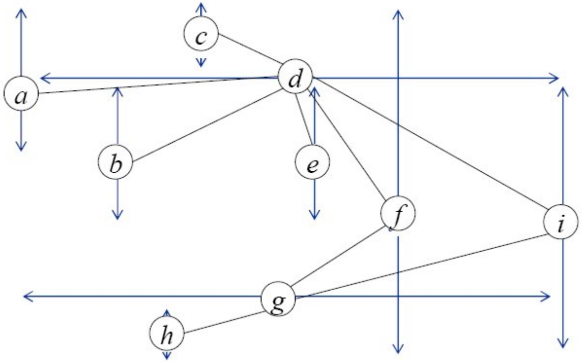
Soluzione



Grafo $G(V,E)$

- V: insieme dei corridoi rettilinei.
- E: coppie di corridoi che si intersecano.

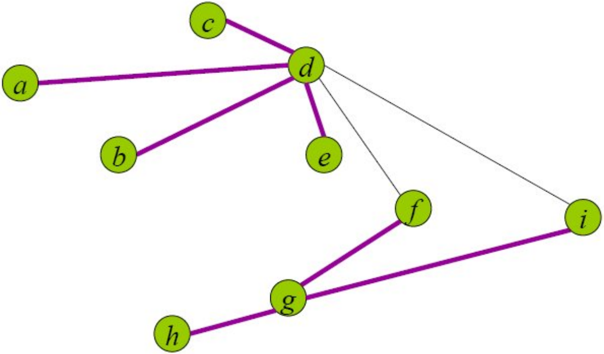
Soluzione



Grafo $G(V,E)$

- V: insieme dei corridoi rettilinei.
- E: coppie di corridoi che si intersecano.

Soluzione



Grafo $G(V,E)$

- V: insieme dei corridoi rettilinei.
- E: coppie di corridoi che si intersecano.

Formulazione

Problema combinatorico $(U, \mathcal{F}, c)$

- $U = E$
- $\mathcal{F} =$ famiglia degli insiemi di archi che coprono tutti i vertici $V(G)$ (*edge cover*)
- $c =$ funzione che associa costo pari a 1 ad ogni arco di G

Il problema, della forma

$$\min_{X \in \mathcal{F}} c(X)$$

consiste nel trovare all'interno di G un edge-cover di peso minimo. Si osservi che siccome i corridoi orizzontali (verticali) non si intersecano tra di loro, i vertici sono partizionati in due insiemi stabili, e quindi G è bipartito. In astratto il problema può essere definito su un grafo qualsiasi.

Albero ricoprente

Definition

Dato un grafo $G = (V, E)$ connesso, un albero ricoprente T è un sottoinsieme massimale dell'insieme degli archi che inducano un sottografo aciclico; ovvero T è un insieme massimale degli archi che connetta ogni coppia di nodi attraverso, al più, un cammino.

Albero ricoprente

Definition

Dato un grafo $G = (V, E)$ connesso, un albero ricoprente T è un sottoinsieme massimale dell'insieme degli archi che inducano un sottografo aciclico; ovvero T è un insieme massimale degli archi che connetta ogni coppia di nodi attraverso, al più, un cammino.

Problem

Minimum Spanning Tree Dato un grafo simmetrico $G(V, E)$, pesato sugli archi ($c : E \to \mathbb{R}$), si vuole trovare l'albero ricoprente di peso minimo.

Albero ricoprente

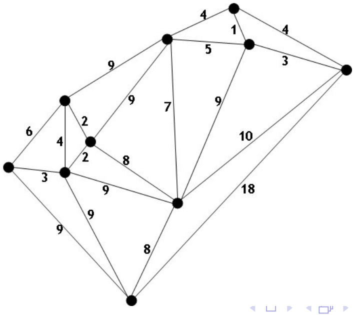
Definition

Dato un grafo $G = (V, E)$ connesso, un albero ricoprente T è un sottoinsieme massimale dell'insieme degli archi che inducano un sottografo aciclico; ovvero T è un insieme massimale degli archi che connetta ogni coppia di nodi attraverso, al più, un cammino.

Problem

Minimum Spanning Tree Dato un grafo simmetrico $G(V, E)$, pesato sugli archi ($c : E \to \mathbb{R}$), si vuole trovare l'albero ricoprente di peso minimo.

Un esempio



Albero ricoprente

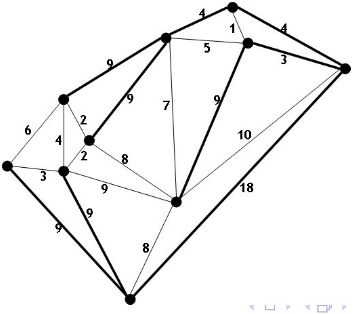
Definition

Dato un grafo $G = (V, E)$ connesso, un albero ricoprente T è un sottoinsieme massimale dell'insieme degli archi che inducano un sottografo aciclico; ovvero T è un insieme massimale degli archi che connetta ogni coppia di nodi attraverso, al più, un cammino.

Problem

Minimum Spanning Tree Dato un grafo simmetrico $G(V, E)$, pesato sugli archi ($c : E \to \mathbb{R}$), si vuole trovare l'albero ricoprente di peso minimo.

Un esempio



Albero ricoprente

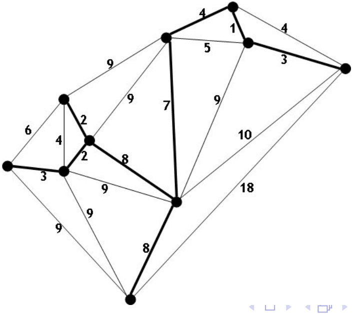
Definition

Dato un grafo $G = (V, E)$ connesso, un albero ricoprente T è un sottoinsieme massimale dell'insieme degli archi che inducano un sottografo aciclico; ovvero T è un insieme massimale degli archi che connetta ogni coppia di nodi attraverso, al più, un cammino.

Problem

Minimum Spanning Tree Dato un grafo simmetrico $G(V, E)$, pesato sugli archi ($c : E \to \mathbb{R}$), si vuole trovare l'albero ricoprente di peso minimo.

Un esempio



Formulazione

Variabili di decisione

$x_{uv} = 1$ sse l'arco $uv \in E$ appartiene all'albero ricoprente

Formulazione

Variabili di decisione

$x_{uv} = 1$ sse l'arco $uv \in E$ appartiene all'albero ricoprente

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$$

Formulazione

Variabili di decisione

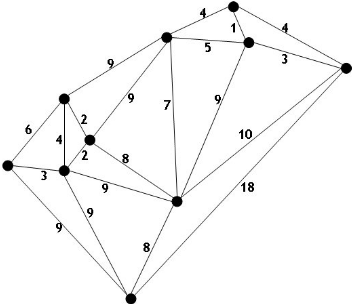
$x_{uv} = 1$ sse l'arco $uv \in E$ appartiene all'albero ricoprente

Vincoli

- gli archi dell'albero devono coprire tutti i vertici

$$\sum_{uv \in E: u \in W,\, v \in V \setminus W} x_{uv} \geqslant 1 \quad \forall W \subset V,$$

$$W \neq \emptyset$$



Formulazione

Variabili di decisione

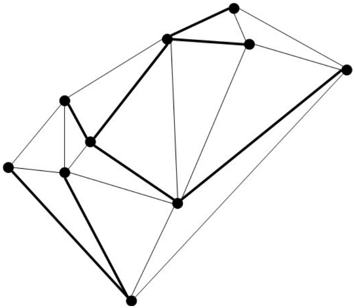
$$x_{uv} = 1 \text{ sse l'arco } uv \in E \text{ appartiene all'albero ricoprente}$$

Vincoli

- gli archi dell'albero devono coprire tutti i vertici

$$\sum_{uv \in E: u \in W,\, v \in V \setminus W} x_{uv} \geqslant 1 \quad \forall W \subset V,$$

$$W \neq \emptyset$$



Formulazione

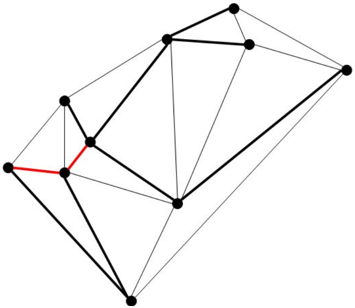
Variabili di decisione

$x_{uv} = 1$ sse l'arco $uv \in E$ appartiene all'albero ricoprente

Vincoli

- gli archi dell'albero devono coprire tutti i vertici

$$\sum_{uv \in E: u \in W,\, v \in V \setminus W} x_{uv} \geqslant 1 \quad \forall W \subset V, \quad W \neq \emptyset$$



Travelling Salesman Problem (TSP)

Definition (Circuito Hamiltoniano)

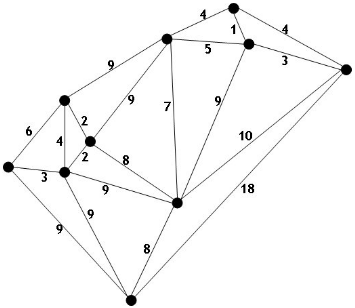
Dato un grafo $G = (V, E)$, un ciclo Hamiltoniano in G è un ciclo che visita tutti i vertici del grafo esattamente una volta e torna al vertice di partenza.

Travelling Salesman Problem (TSP)

Definition (Circuito Hamiltoniano)

Dato un grafo $G = (V, E)$, un ciclo Hamiltoniano in G è un ciclo che visita tutti i vertici del grafo esattamente una volta e torna al vertice di partenza.

Un esempio

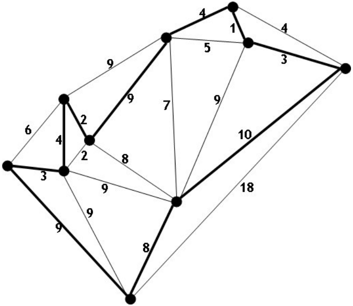


Travelling Salesman Problem (TSP)

Definition (Circuito Hamiltoniano)

Dato un grafo $G = (V, E)$, un ciclo Hamiltoniano in G è un ciclo che visita tutti i vertici del grafo esattamente una volta e torna al vertice di partenza.

Un esempio



Travelling Salesman Problem (TSP)

Definition (Circuito Hamiltoniano)

Dato un grafo $G = (V, E)$, un ciclo Hamiltoniano in G è un ciclo che visita tutti i vertici del grafo esattamente una volta e torna al vertice di partenza.

Problem (Commesso viaggiatore)

Dato un insieme di città e i costi di spostamento da una generica città verso tutte le altre, qual è il percorso più economico che visita tutte le città esattamente una volta ritornando alla città di partenza?

Travelling Salesman Problem (TSP)

Definition (Circuito Hamiltoniano)

Dato un grafo $G = (V, E)$, un ciclo Hamiltoniano in G è un ciclo che visita tutti i vertici del grafo esattamente una volta e torna al vertice di partenza.

Problem (Symmetric-TSP)

Dato un grafo $G = (V, E)$ completo e pesato sugli archi, determinare il ciclo Hamiltoniano su G di peso minimo.

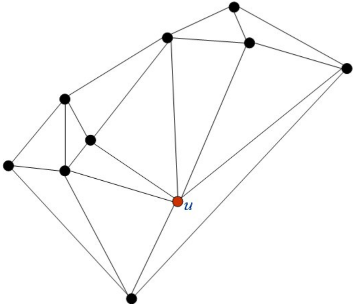
Definizioni preliminari

Definition

Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico e $u \in V$ un generico vertice. L'insieme

$$\delta(u) := \{v \in V \mid uv \in E\}$$

viene chiamato *stella* di u.



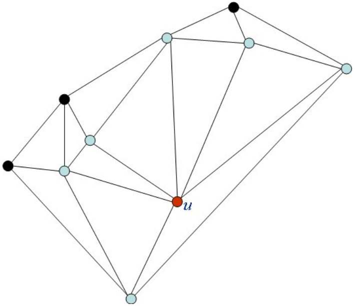
Definizioni preliminari

Definition

Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico e $u \in V$ un generico vertice. L'insieme

$$\delta(u) := \{v \in V \mid uv \in E\}$$

viene chiamato *stella* di u.

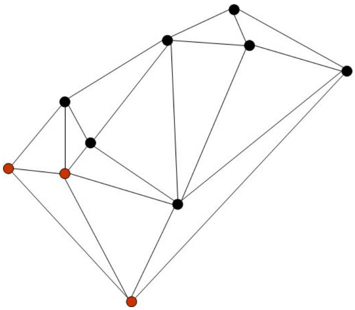


Definizioni preliminari

Definition

Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico e $U \subseteq V$ un sottoinsieme di vertici. Si definisce

$$\delta(U) := \{v \in V \setminus U \mid \exists u \in U : uv \in E\}$$

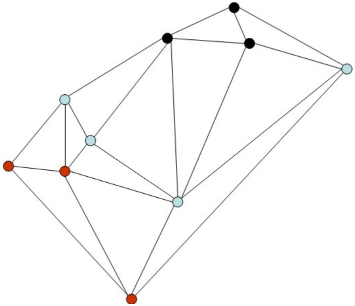


Definizioni preliminari

Definition

Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico e $U \subseteq V$ un sottoinsieme di vertici. Si definisce

$$\delta(U) := \{v \in V \setminus U \mid \exists u \in U : uv \in E\}$$



Formulazione

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } ij \text{ appartiene al tour} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Formulazione

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } ij \text{ appartiene al tour} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Formulazione

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } ij \text{ appartiene al tour} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

- tutti i nodi devono avere due archi incidenti

$$\sum_{j \in \delta(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in V$$

- non devono esserci subtour

$$\sum_{uv: u \in V \setminus W,\, v \in W} x_{uv} \geqslant 2 \quad W \subset V, V \neq \emptyset$$

Formulazione

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } ij \text{ appartiene al tour} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

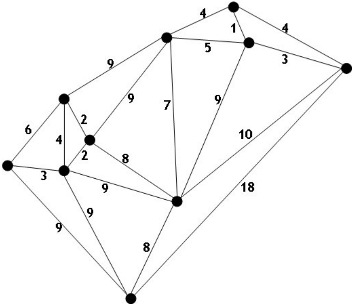
Vincoli

- tutti i nodi devono avere due archi incidenti

$$\sum_{j \in \delta(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in V$$

- non devono esserci subtour

$$\sum_{uv: u \in V \setminus W,\, v \in W} x_{uv} \geqslant 2 \quad W \subset V, V \neq \emptyset$$



Formulazione

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } ij \text{ appartiene al tour} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

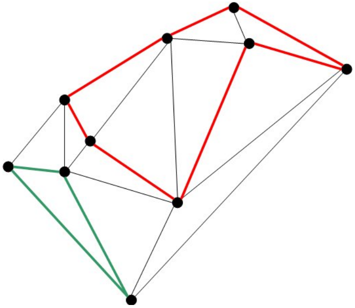
Vincoli

- tutti i nodi devono avere due archi incidenti

$$\sum_{j \in \delta(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in V$$

- non devono esserci subtour

$$\sum_{uv: u \in V \setminus W,\, v \in W} x_{uv} \geqslant 2 \quad W \subset V, V \neq \emptyset$$



Formulazione

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } ij \text{ appartiene al tour} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

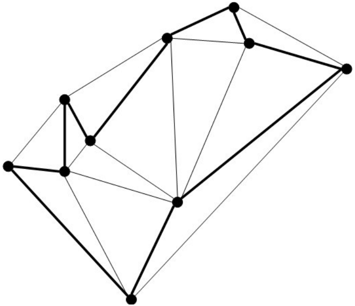
Vincoli

- tutti i nodi devono avere due archi incidenti

$$\sum_{j \in \delta(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in V$$

- non devono esserci subtour

$$\sum_{uv: u \in V \setminus W,\, v \in W} x_{uv} \geqslant 2 \quad W \subset V, V \neq \emptyset$$



Assegnamento

Definition

Sia $G = (U, V, E)$ un grafo bipartito. Un assegnamento da U in V è un insieme di archi $A \subseteq E$ tale che A è un edge-cover per U ed inoltre ogni vertice $u \in U$ è estremo di esattamente un arco di A.

Problem

Dato un grafo bipartito $G = (U, V, E)$ pesato sugli archi ($c : E \to \mathbb{R}_+$), formulare in termini di PL$\{0, 1\}$ il problema di trovare l'assegnamento di U a V di peso minimo.

Assegnamento

Variabili di decisione

$$\forall uv \in E \;\; x_{uv} = 1 \text{ sse l'arco } uv \text{ appartiene all'assegnamento}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$$

Vincoli

- ciascun vertice di U deve essere assegnato ad esattamente un vertice di V

$$\sum_{v \in \delta^+(u)} x_{uv} = 1 \quad \forall u \in V$$

Avventure di un professore

Il professor Birba ama giocare a carte. Essendo un valente matematico quando mischia un mazzo non può fare a meno di pensare che sta operando un assegnamento di carte a posizioni, in cui la carta i-esima del mazzo viene spostata nella posizione j-esima, per $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Può quindi associare ad ogni coppia (carta, posizione) una variabile $x_{ij} \in \{0, 1\}$ che viene posta ad 1 se e solo se la carta i-esima è riposizionata al posto j. Ricordando che per mischiare le carte uno prima divide il mazzo in due mazzetti N_1 e N_2 ($|N_1| + |N_2| = n$), e che le carte di N_t ($t = 1, 2$) dopo la mischiata conservano nel mazzo l'ordine reciproco che avevano in N_t, a quali vincoli devono essere assoggettate le variabili x_{ij} perché rappresentino un modo corretto di mischiare le carte?

Avventure di un professore

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la carta } i \text{ viene spostata in posizione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avventure di un professore

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la carta } i \text{ viene spostata in posizione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

- Ciascuna carta deve essere assegnata ad esattamente una posizione:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Avventure di un professore

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la carta } i \text{ viene spostata in posizione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

- Ciascuna carta deve essere assegnata ad esattamente una posizione:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Ad ogni posizione corrisponde esattamente una carta:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Avventure di un professore

Variabili di decisione

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la carta } i \text{ viene spostata in posizione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

- Ciascuna carta deve essere assegnata ad esattamente una posizione:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

- Ad ogni posizione corrisponde esattamente una carta:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- Deve essere mantenuto l'ordinamento reciproco tra le carte dei due mazzetti:

$$x_{ij} + x_{hk} \leqslant 1 \quad \forall i, h \in N_t \; i < h, \; j > k, \; t = 1, 2.$$

Partitioning

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, sia $c : V \to \mathbb{R}_+$ una funzione peso associata ai vertici. Per ogni $X \subseteq V$ si definisca poi il peso di X come $c(X) = \max\{c(u) : u \in X\}$. Consideriamo il caso in cui X è un insieme di vertici tale che ogni arco di G è toccato esattamente da un vertice di X (si noti che tale insieme potrebbe non esistere). Formulare come programmazione lineare intera il problema di determinare un siffatto insieme X di peso minimo.

Soluzione

Variabili di decisione

$$\forall v \in V,\ x_v = \begin{cases} 1 & v \in X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$z \in \mathbb{R}_+ : \text{ peso dell'insieme ottimo}$$

Soluzione

Variabili di decisione

$$\forall v \in V,\ x_v = \begin{cases} 1 & v \in X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$z \in \mathbb{R}_+ :\ \text{peso dell'insieme ottimo}$$

Vincoli

- per ogni arco, esattamente un estremo appartiene ad X

$$x_u + x_v = 1 \quad \forall uv \in E$$

- il peso di X non è inferiore al peso di ogni suo elemento

$$z \geqslant c_u x_u \quad \forall u \in V$$

Soluzione

Variabili di decisione

$$\forall v \in V,\ x_v = \begin{cases} 1 & v \in X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$z \in \mathbb{R}_+ :\ \text{peso dell'insieme ottimo}$$

Vincoli

- per ogni arco, esattamente un estremo appartiene ad X

$$x_u + x_v = 1 \quad \forall uv \in E$$

- il peso di X non è inferiore al peso di ogni suo elemento

$$z \geqslant c_u x_u \quad \forall u \in V$$

Funzione obiettivo

$$\min z$$

Avventure di un professore - II

Il professor Birba, valente matematico e tifoso del Cagliari, ha deciso di rifare il pavimento della cucina usando piastrelle dei colori sociali della sua squadra del cuore (rosso e blu). La signora Birba però, giudicando l'accostamento un po' vistoso, gli chiede di intercalare le piastrelle colorate con altre bianche in modo che coppie di piastrelle rosse (blu) distino almeno tre piastrelle l'una dall'altra, mentre una piastrella rossa e una blu distino tra loro almeno due piastrelle (definiamo distanza $d(u, v)$ tra due qualsiasi piastrelle u e v del pavimento P come il minimo numero di piastrelle adiacenti in orizzontale o verticale che occorre toccare per passare da u a v). Il professore non ha difficoltà a soddisfare il desiderio di sua moglie, ma cerca di massimizzare il numero di piastrelle colorate formulando un problema di PL$\{0, 1\}$. Sapreste dire quale?

Soluzione

Variabili di decisione

- $x_u = 1$ se la piastrella u è rossa.
- $y_u = 1$ se la pisatrella u è blu.

Soluzione

Variabili di decisione

- $x_u = 1$ se la piastrella u è rossa.
- $y_u = 1$ se la pisatrella u è blu.

Obiettivo

$$\max \sum_{u \in P} (x_u + y_u)$$

Soluzione

Variabili di decisione

- $x_u = 1$ se la piastrella u è rossa.
- $y_u = 1$ se la pisatrella u è blu.

Vincoli

- ciascuna piastrella ha, al più, un colore:

$$x_u + y_u \leqslant 1 \quad \forall u \in P$$

- piastrelle a distanza inferiore a 2 non possono essere entrambe colorate:

$$x_u + y_v \leqslant 1 \quad \forall d(u,v) < 2$$

- piastrelle a distanza inferiore a 3 non possono avere il medesimo colore:

$$x_u + x_v \leqslant 1 \quad \forall d(u,v) < 3$$

$$y_u + y_v \leqslant 1 \quad \forall d(u,v) < 3$$

Biancaneve

I sette nani combinatorici (Angolo, Broccolo, Circolo, Dondolo, Eccolo, Finferlo, Giotto) hanno deciso che per la festa di Biancaneve vestiranno in modo particolare: ogni nano dovrà avere il cappello di colore diverso dai calzoni, e non vi dovranno essere due nani con calzoni del medesimo colore, né due nani con cappello del medesimo colore. Poiché non è detto che vi siano calzoni e cappelli di colori sufficienti, forse non tutti i nani potranno partecipare alla festa. Formulare il problema di massimizzare il numero di nani in grado di rispettare la condizione voluta.

Soluzione

Variabili di decisione

$$x_{ik}^{(P)} = 1 \text{ sse il nano } i \text{ indossa pantaloni di colore } k$$

$$x_{ik}^{(C)} = 1 \text{ sse il nano } i \text{ indossa un cappello di colore } k$$

$$y_i = 1 \text{ sse il nano } i \text{ partecipa alla festa}$$

Soluzione

Variabili di decisione

$$x_{ik}^{(P)} = 1 \text{ sse il nano } i \text{ indossa pantaloni di colore } k$$
$$x_{ik}^{(C)} = 1 \text{ sse il nano } i \text{ indossa un cappello di colore } k$$
$$y_i = 1 \text{ sse il nano } i \text{ partecipa alla festa}$$

Obiettivo

$$\max \sum_{i=1}^{7} y_i$$

Soluzione

Vincoli

- Ciascun nano deve indossare pantaloni (risp. un cappello) di esattamente un colore

$$\sum_k x_{ik}^{(P)} = 1 \quad i = 1, \ldots, 7$$

$$\sum_k x_{ik}^{(C)} = 1 \quad i = 1, \ldots, 7$$

Soluzione

Vincoli

- Ciascun nano deve indossare pantaloni (risp. un cappello) di esattamente un colore

$$\sum_k x_{ik}^{(P)} = 1 \quad i = 1, \ldots, 7$$

$$\sum_k x_{ik}^{(C)} = 1 \quad i = 1, \ldots, 7$$

- un nano con pantaloni e cappello dello stesso colore non può partecipare alla festa

Soluzione

Vincoli

- Ciascun nano deve indossare pantaloni (risp. un cappello) di esattamente un colore

$$\sum_k x_{ik}^{(P)} = 1 \quad i = 1, \ldots, 7$$

$$\sum_k x_{ik}^{(C)} = 1 \quad i = 1, \ldots, 7$$

- un nano con pantaloni e cappello dello stesso colore non può partecipare alla festa

$$\left(x_{ik}^{(C)} + x_{ik}^{(P)} \right) \quad i = 1, \ldots, 7, \ \forall k$$

Soluzione

Vincoli

- Ciascun nano deve indossare pantaloni (risp. un cappello) di esattamente un colore

$$\sum_k x_{ik}^{(P)} = 1 \quad i = 1, \dots, 7$$

$$\sum_k x_{ik}^{(C)} = 1 \quad i = 1, \dots, 7$$

- un nano con pantaloni e cappello dello stesso colore non può partecipare alla festa

$$y_i \leqslant 2 - \left(x_{ik}^{(C)} + x_{ik}^{(P)}\right) \quad i = 1, \dots, 7, \ \forall k$$

Soluzione

Vincoli

- Ciascun nano deve indossare pantaloni (risp. un cappello) di esattamente un colore

$$\sum_k x_{ik}^{(P)} = 1 \quad i = 1, \dots, 7$$

$$\sum_k x_{ik}^{(C)} = 1 \quad i = 1, \dots, 7$$

- un nano con pantaloni e cappello dello stesso colore non può partecipare alla festa

$$y_i \leqslant 2 - \left(x_{ik}^{(C)} + x_{ik}^{(P)} \right) \quad i = 1, \dots, 7, \ \forall k$$

- due nani con pantaloni (risp. cappelli) dello stesso colore non possono, entrambi, partecipare alla festa

$$y_i + y_j \leqslant 3 - \left(x_{ik}^{(C)} + x_{jk}^{(C)} \right) \quad \forall i, j, \ i \neq j, \ \forall k$$

$$y_i + y_j \leqslant 3 - \left(x_{ik}^{(P)} + x_{jk}^{(P)} \right) \quad \forall i, j, \ i \neq j, \ \forall k$$

Al lavoro

Due operai devono eseguire un certo numero di lavori $J = \{1, \ldots, n\}$, ciascuno della durata di un'ora. Per poter essere eseguito, ciascun lavoro richiede la disponibilità di un insieme di attrezzi $T_i = \{1, \ldots, m_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Poiché gli attrezzi sono presenti ciascuno in una sola copia e sono condivisi dai due operai, costoro devono mettersi d'accordo sull'ordine in cui eseguire i lavori in modo che i lavori che richiedono un medesimo utensile siano (per quanto possibile) eseguiti in tempi diversi. Formulare in termini di ottimizzazione combinatoria il problema di completare i lavori nel minimo tempo possibile servendosi di un opportuno grafo G.

W gli sposi

L'agenzia matrimoniale *Cometimuovitaccoppio* vuole massimizzare il proprio guadagno, cercando di accoppiare tra loro il massimo numero di iscritti. A questo scopo, sia M l'insieme degli iscritti di sesso maschile, F l'insieme degli iscritti di sesso femminile, e sia $w_{i,j}$ il grado di compatibilità per ogni coppia $(i,j) \in M \times F$. Sapendo che a un grado di compatibilità (eventualmente anche negativo) pari a $w_{i,j}$ corrisponde un guadagno proporzionale $Kw_{i,j}$, e che sono possibili solo accoppiamenti di persone nella stessa regione, formulare il problema di massimizzare il guadagno dell'azienda con un modello di PL$\{0,1\}$.

Produzione industriale

In un sistema di produzione, n lavori devono essere eseguiti da m macchine in parallelo. Ogni macchina può effetture un lavoro alla volta e ogni lavoro deve essere eseguito da una sola macchina senza interruzione. Siano c_{ij} e p_{ij} rispettivamente il costo ed il tempo (in ore) necessari ad eseguire il lavoro j sulla macchina i. Inoltre, se ad una macchina è assegnato almeno un lavoro, per la sua messa in funzione deve essere considerato un costo aggiuntivo di attivazione pari a f_i, $i = 1, \dots, m$. Sapendo che ogni macchina può operare per non più di C ore, formulare il problema di assegnare i lavori alle macchine, con l'obiettivo di minimizzare i costi totali di produzione.

Reti di calcolatori

In una rete di calcolatori, vi sono n terminali ciascuno dei quali deve essere collegato ad un concentratore. Ci sono m concentratori, a ognuno dei quali possono essere collegati al più k terminali. Perché un concentratore possa essere collegato a un terminale, quest'ultimo deve essere "attivo". Il costo di attivazione di un concentratore j è f_j , mentre il costo di collegamento del terminale i con il concentratore j è c_{ij}. Formulare come PL$\{0, 1\}$ il problema di minimizzare i costi complessivi, nel rispetto dei vincoli.