Claudio Arbib
Università dell’Aquila

Ricerca Operativa

Matrici Totalmente Unimodulari

Definizioni

Definizione 1 Una matrice $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{n \times n}$ è unimodulare se il suo determinante $|\mathbf{A}| \in \{0, \pm 1\}$

Esempio 1 Sono unimodulari

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Esempio 2 Non sono unimodulari

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Definizioni

Definizione 2 Una matrice $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m \times n}$ è totalmente unimodulare se ogni sua sottomatrice quadrata $\mathbf{B}$ è unimodulare

Esempio 3 Sono totalmente unimodulari

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 4 Non sono totalmente unimodulari

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proprietà

Teorema 1

Se nel problema di PL

$$(P) \qquad \min \quad \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

A è totalmente unimodulare e **b** intero, allora ogni soluzione di base di P è intera

Dimostrazione Una soluzione di base ha la forma $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$.
$\mathbf{A}_B^{-1}$ si ottiene trasponendo la matrice aggiunta di $\mathbf{A}_B$ e dividendola per $|\mathbf{A}_B|$.
L'elemento *ik* dell'aggiunta di $\mathbf{A}_B$ è il complemento algebrico di a_{ik}, e vale $(-1)^{i+k}|\mathbf{A}_B^{ik}|$, dove $\mathbf{A}_B^{ik}$ si ottiene cancellando la riga i e la colonna k di $\mathbf{A}_B$.
Poiché **A** è tot. unimodulare, si ha $|\mathbf{A}_B| = \pm 1$ e $|\mathbf{A}_B^{ik}| \in \{0, \pm 1\}$.

Quindi gli elementi di $\mathbf{A}_B^{-1}$ sono tutti 0 o ±1. Siccome **b** è intero …

Proprietà

Teorema 2

Condizione necessaria perché $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m \times n}$ sia totalmente unimodulare è che ogni suo elemento sia 0, +1 oppure –1

Dimostrazione

Ovvia: un elemento di **A** corrisponde a una matrice quadrata 1×1.

Proprietà

Teorema 3 Condizione sufficiente perché $\mathbf{A} \in \{0, \pm 1\}^{m \times n}$ sia totalmente unimodulare è che

1) ogni colonna di **A** abbia al più due elementi $\neq 0$

2) esista una partizione R_1, R_2 delle righe di **A** tale che per ogni colonna k

$$a_{ik}a_{jk} = 1 \quad \Rightarrow \quad i, j \in R_p \quad (p = 1 \text{ oppure } 2)$$

$$a_{ik}a_{jk} = -1 \quad \Rightarrow \quad i \in R_p, j \in R_q \quad (p \neq q)$$

Proprietà

Dimostrazione — Dobbiamo provare che tutte le sottomatrici quadrate $\mathbf{A}_k$ di $\mathbf{A}$ aventi ordine k sono unimodulari. Per induzione sull'ordine k.

Caso base — Per $k = 1$ il teorema è banale (per il Teorema 2 gli elementi di $\mathbf{A}$ sono 0, +1 o –1)

Passo induttivo — Supponiamo il teorema vero per un certo k e dimostriamolo per $k + 1$.

Si danno le seguenti possibilità:

1) $\mathbf{A}_{k+1}$ contiene una colonna nulla $\Rightarrow |\mathbf{A}_{k+1}| = 0$

2) $\mathbf{A}_{k+1}$ contiene una colonna unitaria $\Rightarrow$ sviluppando $|\mathbf{A}_{k+1}|$ secondo tale colonna si ha $|\mathbf{A}_{k+1}| = \pm|\mathbf{A}_k|$, che per induzione è 0 o ± 1

3) tutte le colonne di $\mathbf{A}_{k+1}$ hanno 2 elementi $\neq 0$ $\Rightarrow$ sommando tra loro le righe di R_1 si ottiene una riga uguale a quella ottenuta sommando tra loro le righe di R_2. Quindi $|\mathbf{A}_{k+1}| = 0$

Proprietà

Esempio 5 — La matrice di incidenza nodi-archi **G** di un grafo orientato $G = (V, E)$ è totalmente unimodulare

Esempio 6 — La matrice di incidenza nodi-archi **H** di un grafo bipartito simmetrico $H = (V_1 \cup V_2, F)$ è totalmente unimodulare

Proprietà

Teorema 4 Se $\mathbf{A}$ è totalmente unimodulare, allora anche $\mathbf{A}^T$ e $[\mathbf{A}, \pm\mathbf{I}]$ (con $\mathbf{I}$ matrice identica) sono totalmente unimodulari

Dimostrazione Ovvia.

Esempio 7

Trasposta della terza matrice dell'esempio 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Proprietà

Teorema 5 Condizione sufficiente affinché **A** sia totalmente unimodulare è che ogni riga di **A** abbia la forma $\mathbf{a}_i = (0 \ldots 0\ 1 \ldots 1\ 0 \ldots 0)$ (proprietà degli uno consecutivi)

Dimostrazione Sia $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, quadrata $m \times m$. Sia inoltre

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dove } \det(\mathbf{T}) = 1$$

È facile verificare che $\mathbf{G} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}$ fornisce la matrice di incidenza nodi-archi di un grafo orientato.
D'altra parte per un noto teorema sui determinanti si ha $\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{T})$, e il teorema è così dimostrato.