Claudio Arbib
Università di L’Aquila

Ricerca Operativa

Il metodo del simplesso: descrizione geometrica

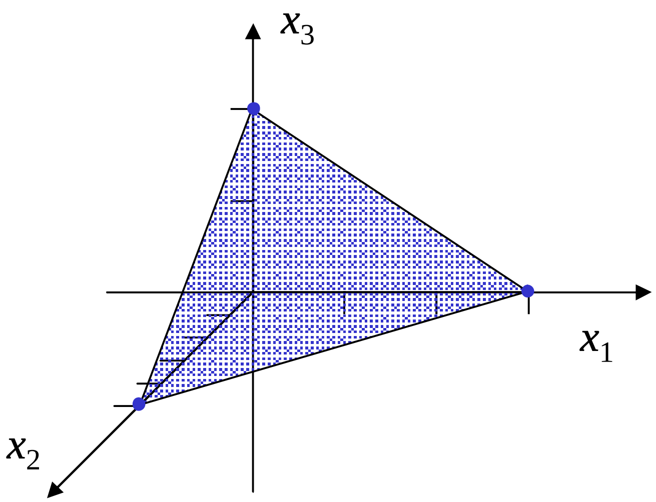
Sommario

Esempio 1

Consideriamo il problema di PL in forma standard

$$
\begin{array}{llr}
P: & \min & 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\
& & 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 30 \\
& & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

dove quindi $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^1$, $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{1\times 3}$, ed evidentemente $rg(\mathbf{A}) = 1$.



Il poliedro del problema P è un triangolo con vertici (3, 0, 0), (0, 5, 0) e (0, 0, 2)

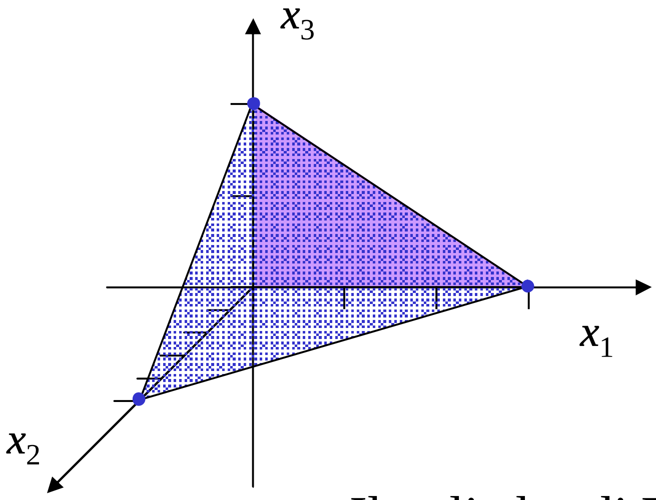
Esempio 1

Consideriamo il problema di PL in forma standard

$$\text{P:} \quad \min \quad 3x_1 + 5x_2 - x_3$$
$$10x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 30$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

dove quindi $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^1$, $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{1\times 3}$, ed evidentemente $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 1$.

Per $B = \{2\}$ la sottomatrice $\mathbf{A}_B = [6]$ è chiaramente non singolare, dunque B è una base per P. Premoltiplicando l'equazione del problema per $\mathbf{A}_B^{-1} = [{}^1/_6]$, ricavando x_2 ed eliminandola si ricava il problema equivalente



$$\text{P':} \quad \min \quad -\,{}^{16}/_3\, x_1 - {}^{27}/_2\, x_3 + 25$$
$${}^5/_3\, x_1 + {}^5/_2\, x_3 \leq 5$$
$$x_1, x_3 \geq 0$$

Il poliedro di P' è un triangolo di vertici (0, 0), (3, 0) e (0, 2).

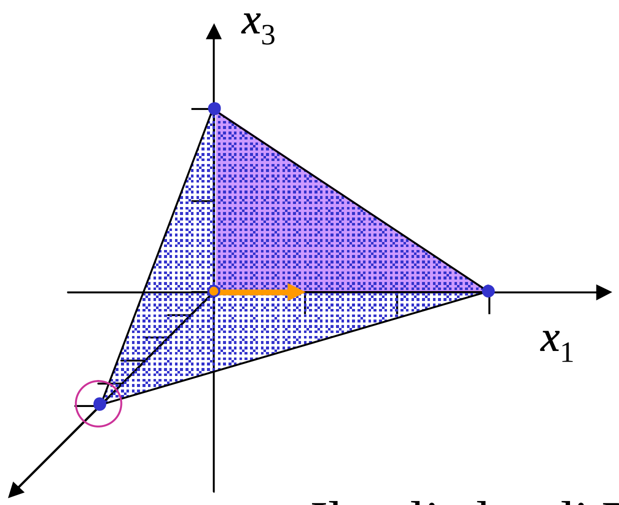
Esempio 1

La soluzione associata alla base $B = \{2\}$ corrisponde

- nel poliedro di P, al vertice (0, 5, 0);
- nel poliedro di P', al vertice (0, 0).

In entrambi i problemi il suo valore è 25.

Poiché il coefficiente (di costo ridotto) della x_1 nel problema P' è < 0, il versore (1, 0) rappresenta una direzione di miglioramento per P'.



Premoltiplicando l'equazione del problema per $\mathbf{A}_B^{-1} = [^1/_6]$, ricavando x_2 ed eliminandola si ricava il problema equivalente

$$\text{P'}: \quad \min \quad -\,{}^{16}/_3\, x_1 - {}^{27}/_2\, x_3 + 25$$
$$^5/_3\, x_1 + {}^5/_2\, x_3 \leq 5$$
$$x_1, x_3 \geq 0$$

Il poliedro di P' è un triangolo di vertici (0, 0), (3, 0) e (0, 2).

Esempio 1

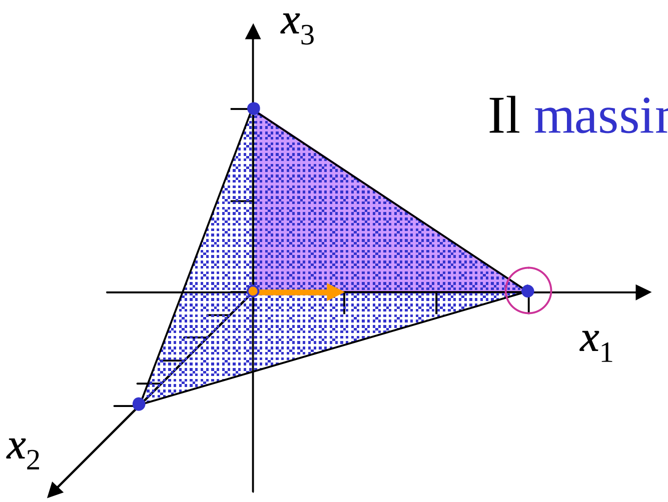
La soluzione associata alla base $B = \{2\}$ corrisponde

– nel poliedro di P, al vertice (0, 5, 0);

– nel poliedro di P', al vertice (0, 0).

In entrambi i problemi il suo valore è 25.

Poiché il coefficiente (di costo ridotto) della x_1 nel problema P' è < 0, il versore (1, 0) rappresenta una direzione di miglioramento per P'.



Infatti la soluzione $(x_1, x_3) = (0, 0) + \lambda(1, 0)$ è ammissibile per P' purché $\lambda \in [0, 3]$.

Il massimo miglioramento si ottiene scegliendo $\lambda = 3$, cioè portandosi nel vertice (3, 0).

$$
\begin{array}{llr}
\text{P':} & \min & -\,{}^{16}/_{3}\,x_1 - {}^{27}/_{2}\,x_3 + 25 \\
 & & {}^{5}/_{3}\,x_1 + {}^{5}/_{2}\,x_3 \le 5 \\
 & & x_1, x_3 \ge 0
\end{array}
$$

La corrispondente nuova soluzione di base di P è (3, 0, 0).

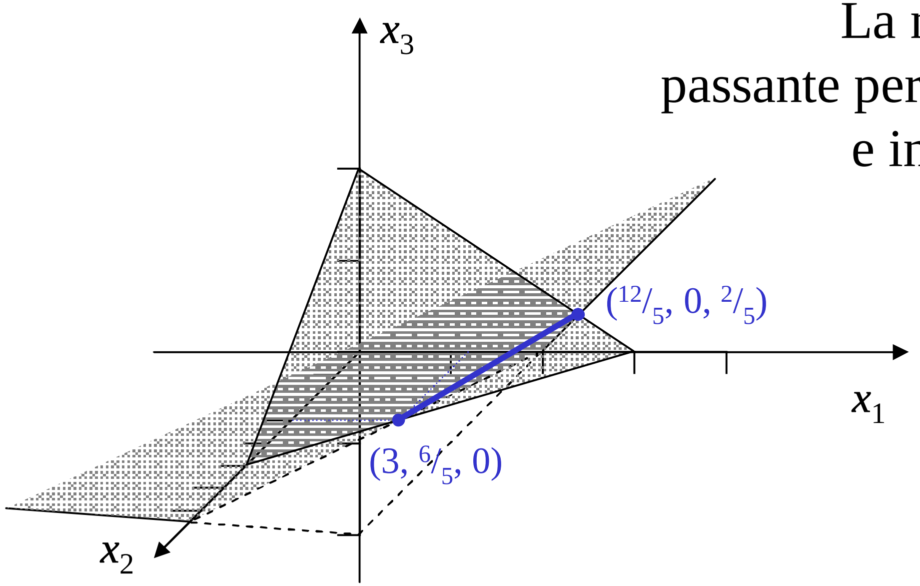
Esempio 2

Modifichiamo il problema cambiando obiettivo e aggiungendo un'equazione:

$$\begin{array}{llrcl} P: & \min & 5x_1 + 3x_2 - x_3 & & \\ & & 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 & = & 30 \\ & & 15x_1 + 4x_2 - 15x_3 & = & 30 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Si ha quindi $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^2$, $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{2\times 3}$, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$.

La nuova equazione rappresenta un piano passante per i punti $(0, 0, -2)$, $(0, {}^{15}/_{2}, 0)$, $(2, 0, 0)$ e intersecante il poliedro dell'Esempio 1.



Il poliedro del problema P è ora un segmento di estremi (vertici) $({}^{12}/_5, 0, {}^{2}/_5)$ e $(3, {}^{6}/_5, 0)$

Esempio 2

Modifichiamo il problema cambiando obiettivo e aggiungendo un'equazione:

$$
\begin{array}{lll}
\text{P:} & \min & 5x_1 + 3x_2 - x_3 \\
 & & 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 30 \\
 & & 15x_1 + 4x_2 - 15x_3 = 30 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Si ha quindi $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^2$, $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{2\times 3}$, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$.

Per $B = \{1, 2\}$ la sottomatrice

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$$

è non singolare: dunque B è una base per P.

In particolare, $\det(\mathbf{A}_B) = -50$, e

$$\mathbf{A}_B^{-1} = -\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/25 & 3/25 \\ 3/10 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Esempio 2

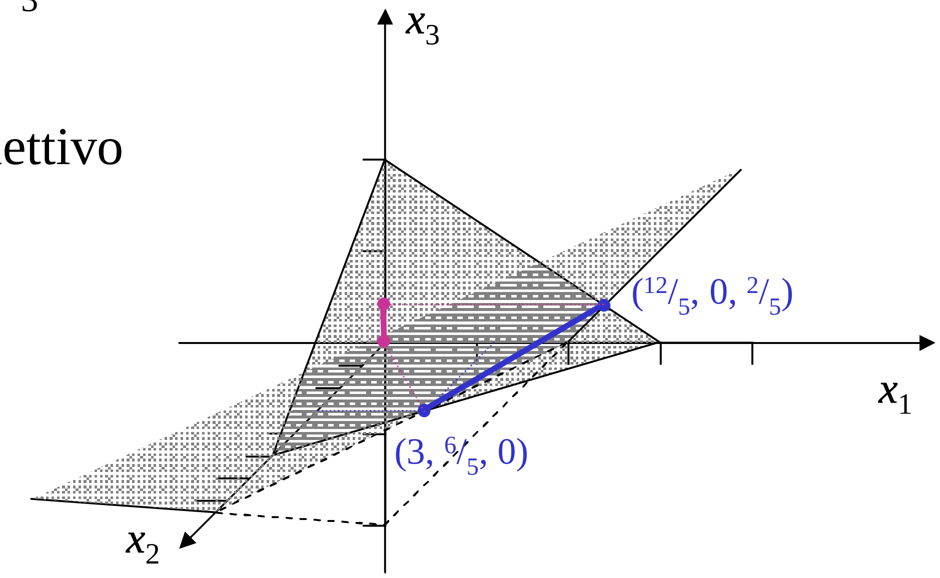
Premoltiplicando il sistema di equazioni per $\mathbf{A}_B^{-1}$ si ottiene il problema

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{P:} & \min & 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 & & \\
& & x_1 \qquad - 3x_3 & = & {}^6/_5 \\
& & x_2 + {}^{15}/_2\, x_3 & = & 3 \\
& & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

base ammissibile

Eliminando x_1 e x_2 dalla funzione obiettivo si ha il problema equivalente in IR^1:

$$
\begin{array}{lll}
\text{P':} & \min & 15 - 17x_3 \\
& & x_3 \geq -{}^2/_5 \\
& & x_3 \leq {}^2/_5 \\
& & x_3 \geq 0
\end{array}
$$



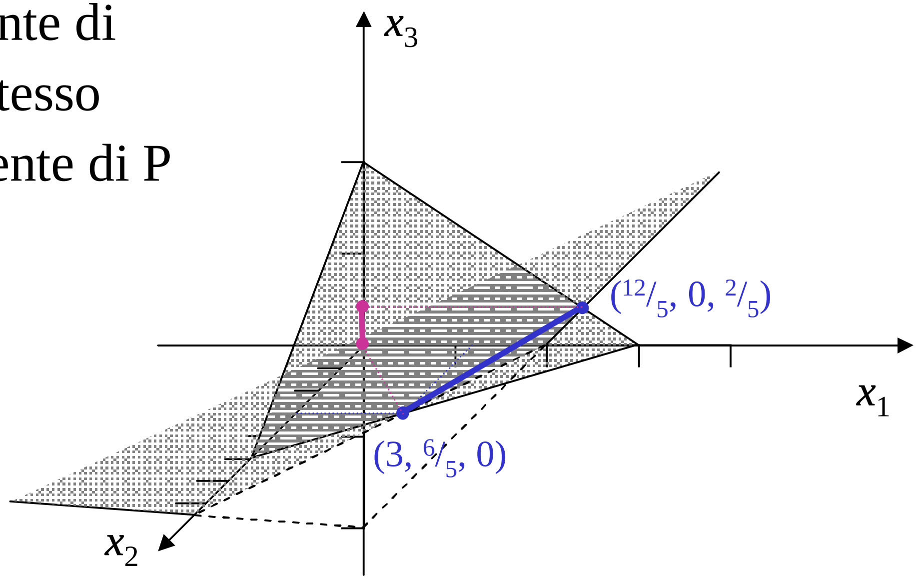
Il poliedro di P' ha per vertici i punti $x_3 = {}^2/_5$ e $x_3 = 0$, che corrispondono ai vertici $({}^{12}/_5, 0, {}^2/_5)$ e $(3, {}^6/_5, 0)$ del poliedro di P (soluzioni di base).

Esempio 2

Il costo ridotto di x_3 è < 0. Dunque il versore $\mathbf{d} = (0, 0, 1)$ costituisce una direzione di miglioramento per il problema P'.

La soluzione di P associata a B è $\mathbf{x} = (3, {}^6/_5, 0)$. Osserviamo che $\mathbf{d}$ non è una direzione di miglioramento per P, in quanto $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \notin$ al poliedro di P per $\lambda > 0$.

Tuttavia un'operazione di pivot consente di portare x_3 in base al valore ${}^2/_5$, e allo stesso tempo di aggiornare la soluzione corrente di P da $(3, {}^6/_5, 0)$ a $({}^{12}/_5, 0, {}^2/_5)$.



Dalla tabella

0	0	–17	–15
1	0	–3	${}^6/_5$
0	1	${}^{15}/_2$	3

si passa infatti alla tabella (ottima)

0	${}^{34}/_{15}$	0	$-{}^{41}/_5$
1	${}^6/_{15}$	0	${}^{12}/_5$
0	${}^2/_{15}$	1	${}^2/_5$

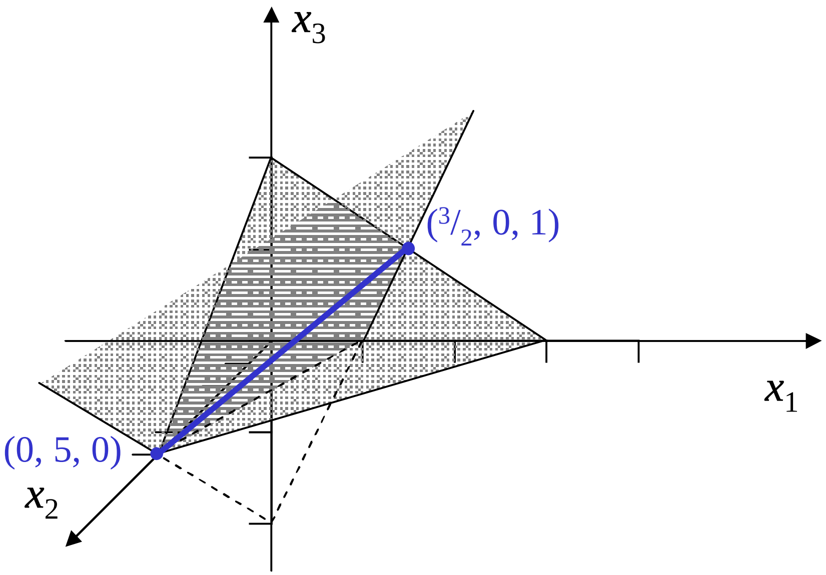
Esempio 3

Consideriamo ora il problema di PL in forma standard

$$\text{P:}\quad \max \quad 3x_1 + 5x_2 - 2x_3$$

$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 &= 30 \\ 10x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

dove quindi $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^2$, $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{2\times 3}$, e ancora $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$.



Stavolta il poliedro dell'Esempio 1 è intersecato da un piano passante per i punti (0, 0, –2), $(0, {}^{15}/_2, 0)$, (2, 0, 0).

Il poliedro del problema P è quindi un segmento di estremi (vertici) (0, 5, 0) e $(^3/_2, 0, 1)$

Esempio 3

Consideriamo ora il problema di PL in forma standard

$$
\begin{array}{lll}
\text{P:} & \max & 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\
& & 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 30 \\
& & 10x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 10 \\
& & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

dove quindi $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^2$, $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{2\times 3}$, e ancora $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$.

Per $B = \{1, 2\}$ la sottomatrice

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

è chiaramente non singolare: dunque B è una base per P.

In particolare, $\det(\mathbf{A}_B) = -40$, e

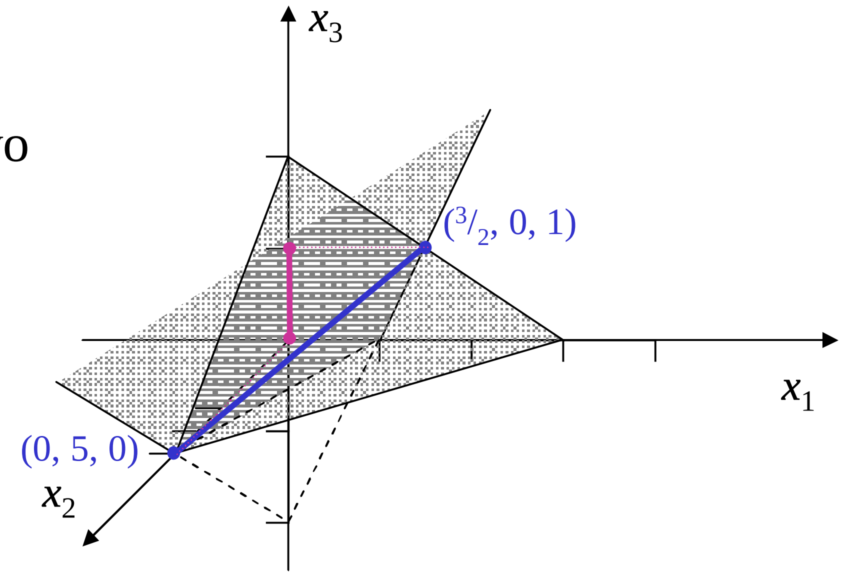
$$\mathbf{A}_B^{-1} = -\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/20 & 3/20 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Esempio 3

Premoltiplicando il sistema di equazioni per $\mathbf{A}_B^{-1}$ si ottiene il problema

$$
\begin{array}{lll}
\text{P:} & \max & 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\
 & & x_1 \qquad - {}^3/_2\, x_3 = 0 \\
 & & \qquad x_2 + 5x_3 = 5 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

base ammissibile ma degenere



Eliminando x_1 e x_2 dalla funzione obiettivo si ha il problema equivalente in IR^1:

$$
\begin{array}{lll}
\text{P':} & \max & 25 - {}^{45}/_2\, x_3 \\
 & & x_3 \geq 0 \\
 & & x_3 \leq 1 \\
 & & x_3 \geq 0
\end{array}
$$

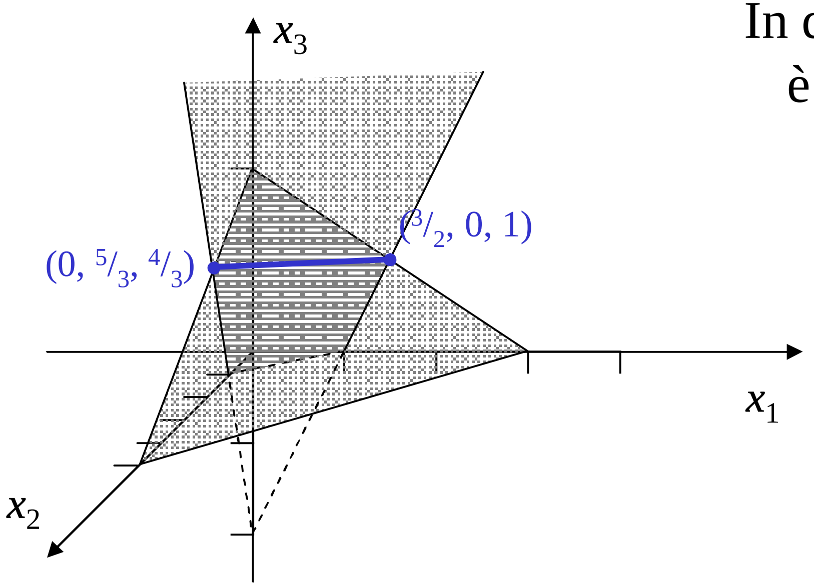
Il poliedro di P' ha per vertici i punti $x_3 = 0$ e $x_3 = 1$, che corrispondono ai vertici (0, 5, 0) e $(^3/_2, 0, 1)$ del poliedro di P (soluzioni di base).

Esempio 4

Consideriamo infine il problema di PL in forma standard

$$\begin{array}{lll} \text{P:} & \max & 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ & & 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 30 \\ & & 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

dove come sempre **c**, **x** $\in$ IR^3, **b** $\in$ IR^2, **A** $\in$ IR$^{2\times3}$, rg(**A**) = 2.



In questo caso il poliedro dell'Esempio 1 è intersecato da un piano passante per i punti (0, 0, –2), (0, $^{15}/_2$, 0), (2, 0, 0).

Il poliedro del problema P è un segmento di estremi (vertici) (0, $^5/_3$, $^4/_3$) e ($^3/_2$, 0, 1)

Esempio 4

Consideriamo infine il problema di PL in forma standard

$$\text{P:}\quad \max \quad 3x_1 + 5x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 &= 30 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

dove come sempre $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^2$, $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{2\times 3}$, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$.

Per $B = \{1, 2\}$ la sottomatrice

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

è chiaramente non singolare: dunque B è una base per P.

In particolare, $\det(\mathbf{A}_B) = 8$, e

$$\mathbf{A}_B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Esempio 4

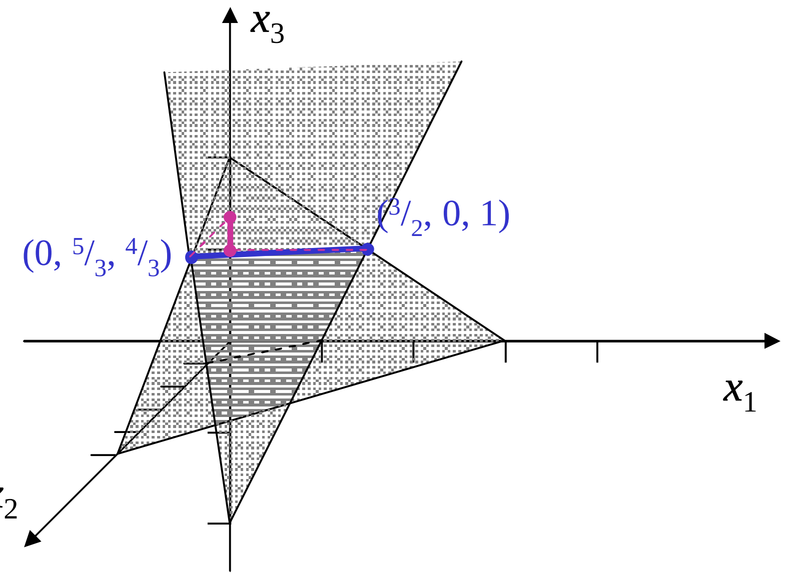
Premoltiplicando il sistema di equazioni per $\mathbf{A}_B^{-1}$ si ottiene il problema

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{P:} & \max & 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 & & \\
& & x_1 \qquad + \ ^9/_2\, x_3 & = & 6 \\
& & x_2 - \ 5\, x_3 & = & -5 \\
& & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

base non ammissibile

Eliminando x_1 e x_2 dalla funzione obiettivo si ha il problema equivalente in IR^1:

$$
\begin{array}{llr}
\text{P':} & \max & 7 - 2x_3 \\
& & x_3 \leq \ ^4/_3 \\
& & x_3 \geq 1 \\
& & x_3 \geq 0
\end{array}
$$



Il poliedro di P' ha per vertici i punti $x_3 = {}^4/_3$ e $x_3 = 1$, che corrispondono ai vertici (soluzioni di base) $(0, {}^5/_3, {}^4/_3)$ e $({}^3/_2, 0, 1)$ del poliedro di P.