



Claudio Arbib
Università di L'Aquila

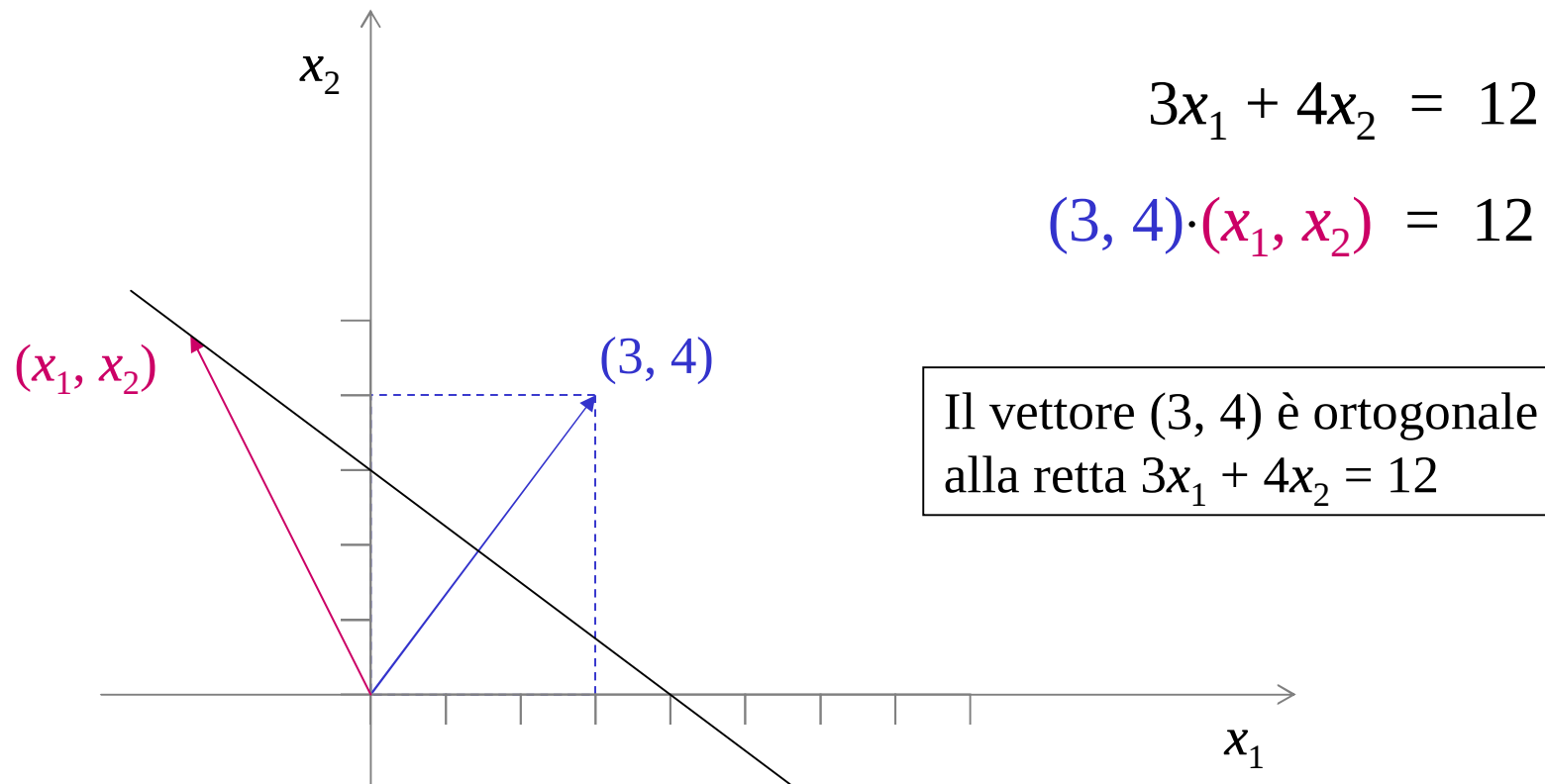
Ricerca Operativa

Programmazione Lineare:
proprietà geometriche

Sommario

- Iperpiani in $\mathbb{R}^n$
- Programmazione lineare: intuizione geometrica
 - analisi di un sistema dinamico come problema di PL
 - geometria del problema duale
 - un problema più prosaico
 - direzione di miglioramento
- Direzioni di un poliedro
 - cono di recessione e sue proprietà
- Teorema di Weyl
- Teorema fondamentale della PL

Iperpiani in $\mathbb{R}^n$

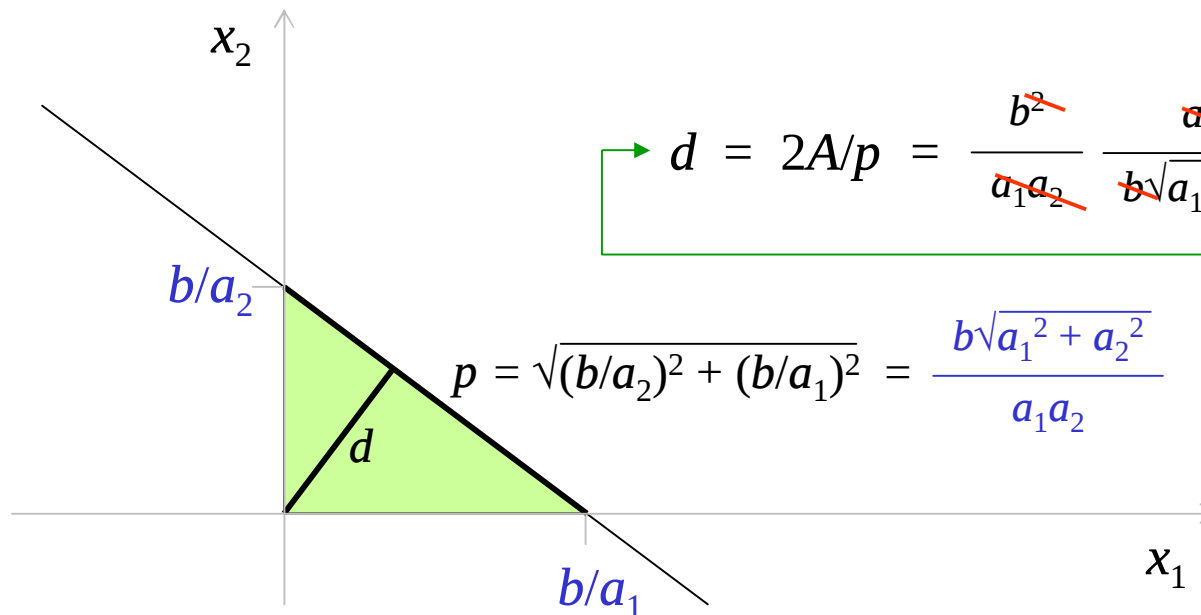


Un esempio

Iperpiani in $\mathbb{R}^n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = d\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (x_1, x_2) = d|(a_1, a_2)|$$



$$d = 2A/p = \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{a_1 a_2}} \frac{\cancel{a_1 a_2}}{\cancel{b} \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$p = \sqrt{(b/a_2)^2 + (b/a_1)^2} = \frac{b\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_1 a_2}$$

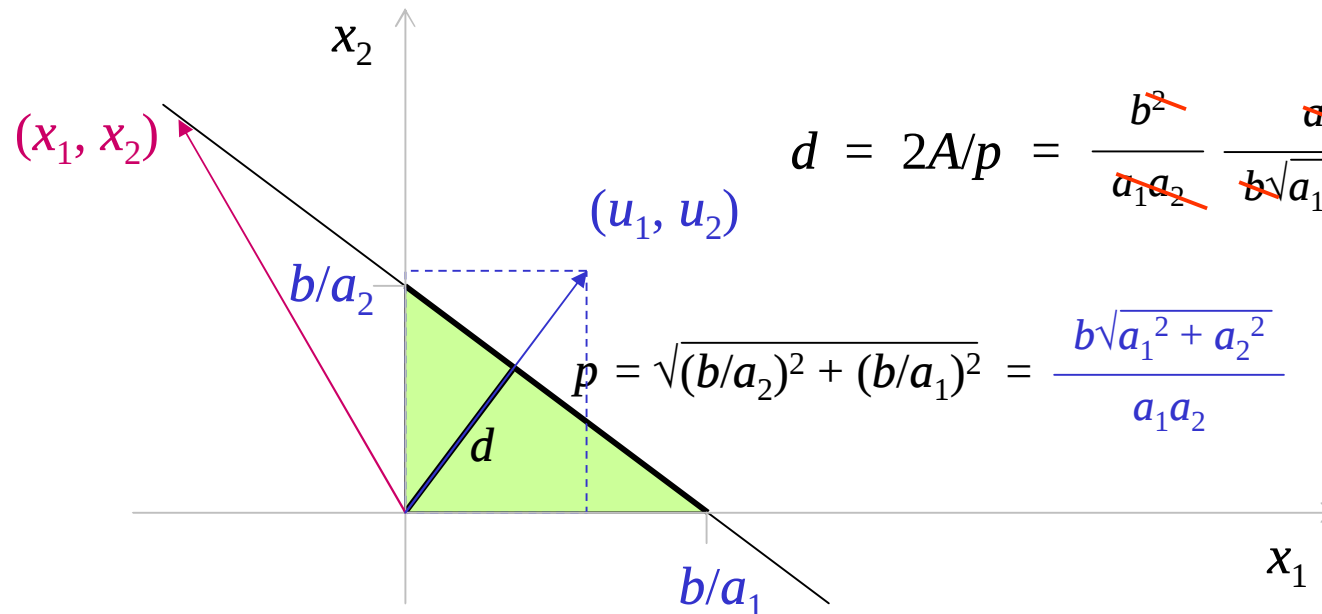
$$2A = b^2/a_1 a_2 \\ = dp$$

In generale

Iperpiani in $\mathbb{R}^n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = d\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$(u_1, u_2) \cdot (x_1, x_2) = d$$



$$d = 2A/p = \frac{b^2}{a_1 a_2} \frac{a_1 a_2}{b \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

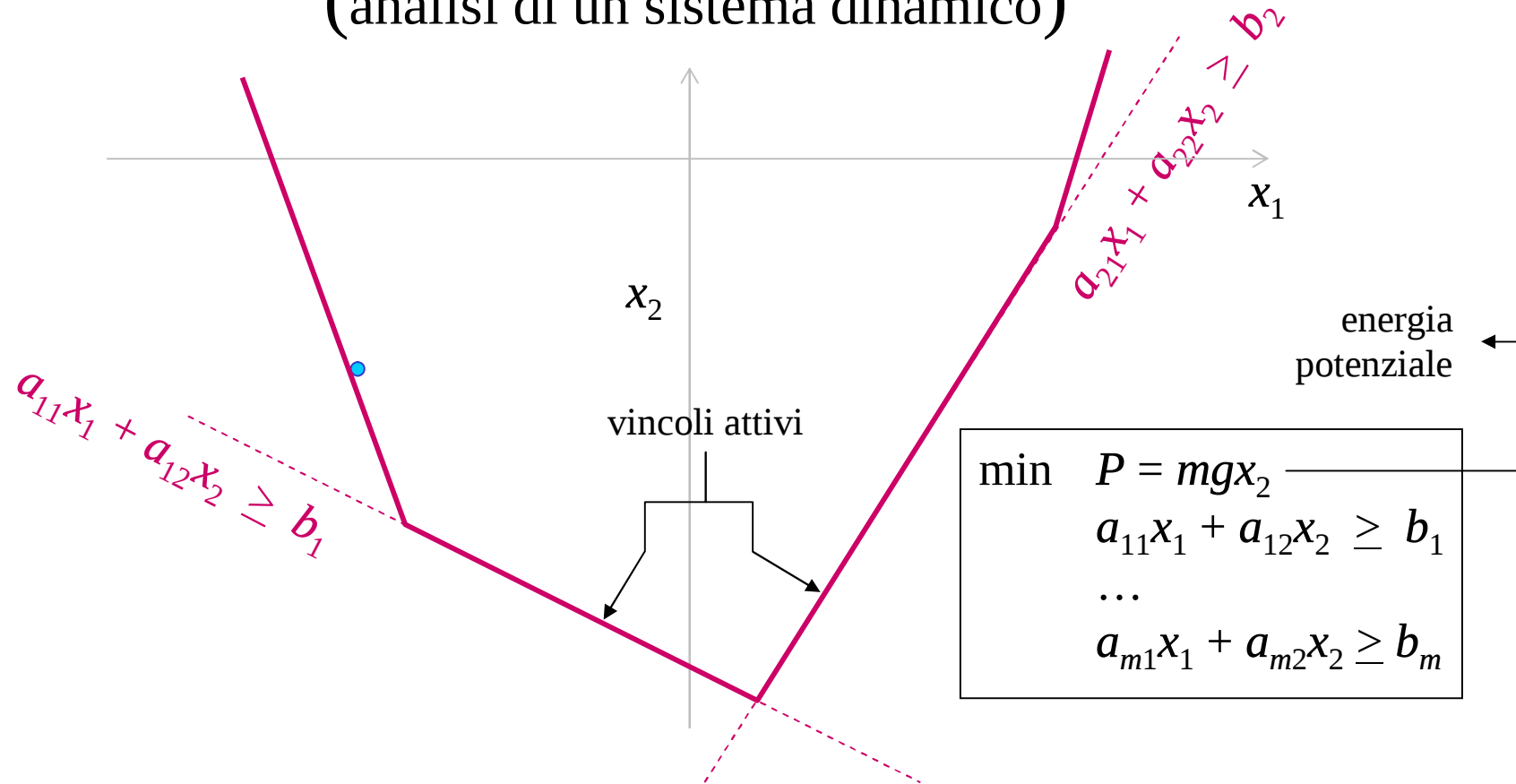
$$p = \sqrt{(b/a_2)^2 + (b/a_1)^2} = \frac{b\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_1 a_2}$$

$$2A = b^2/a_1 a_2 = dp$$

L'iperpiano è quindi il luogo dei vettori $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ la cui **proiezione** sulla direzione del **versore** $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ è pari a d (distanza dell'iperpiano dall'origine)

Galileiana

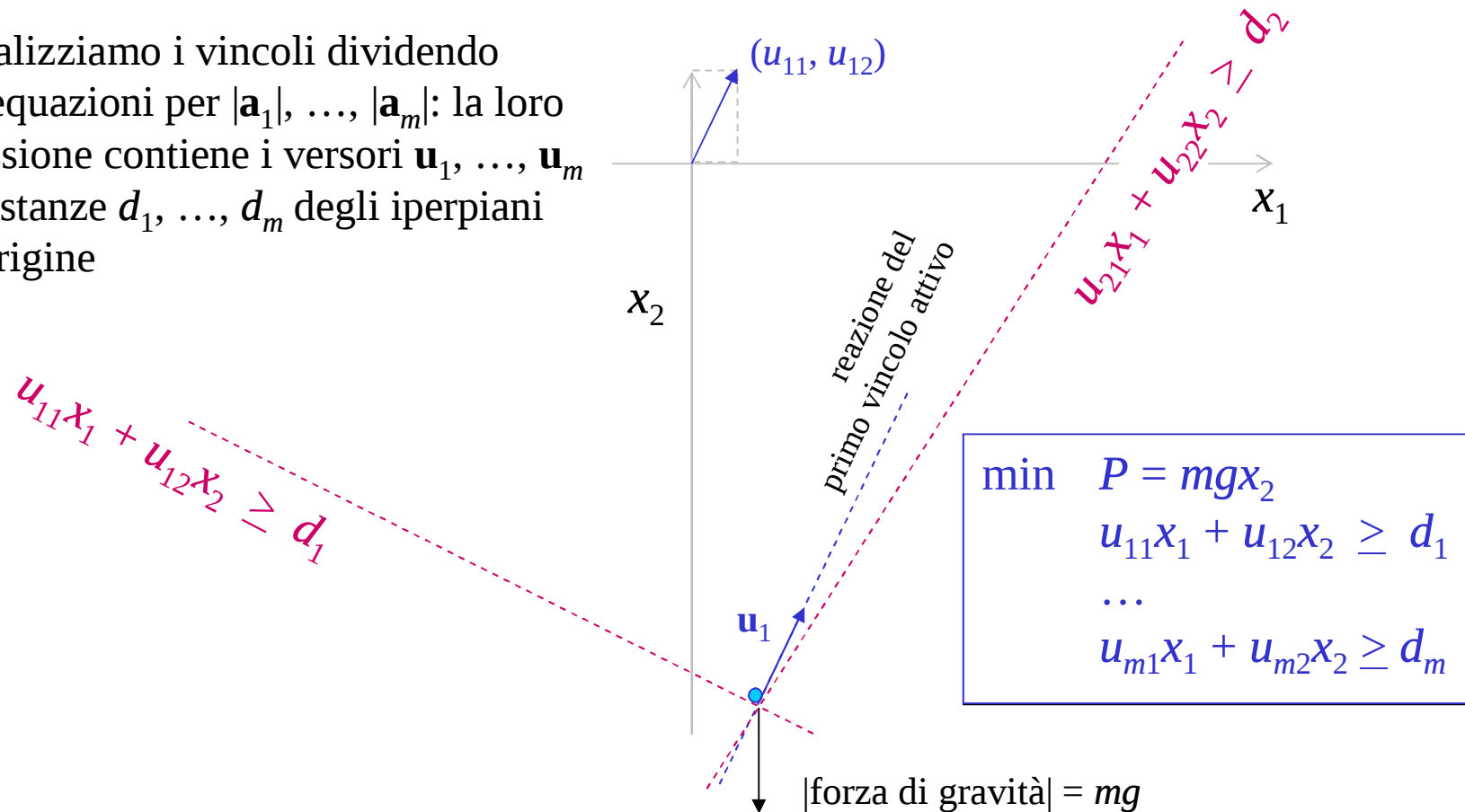
(analisi di un sistema dinamico)



- Dove va a finire una **massa puntiforme** soggetta a gravità in uno spazio delimitato da **vincoli**?

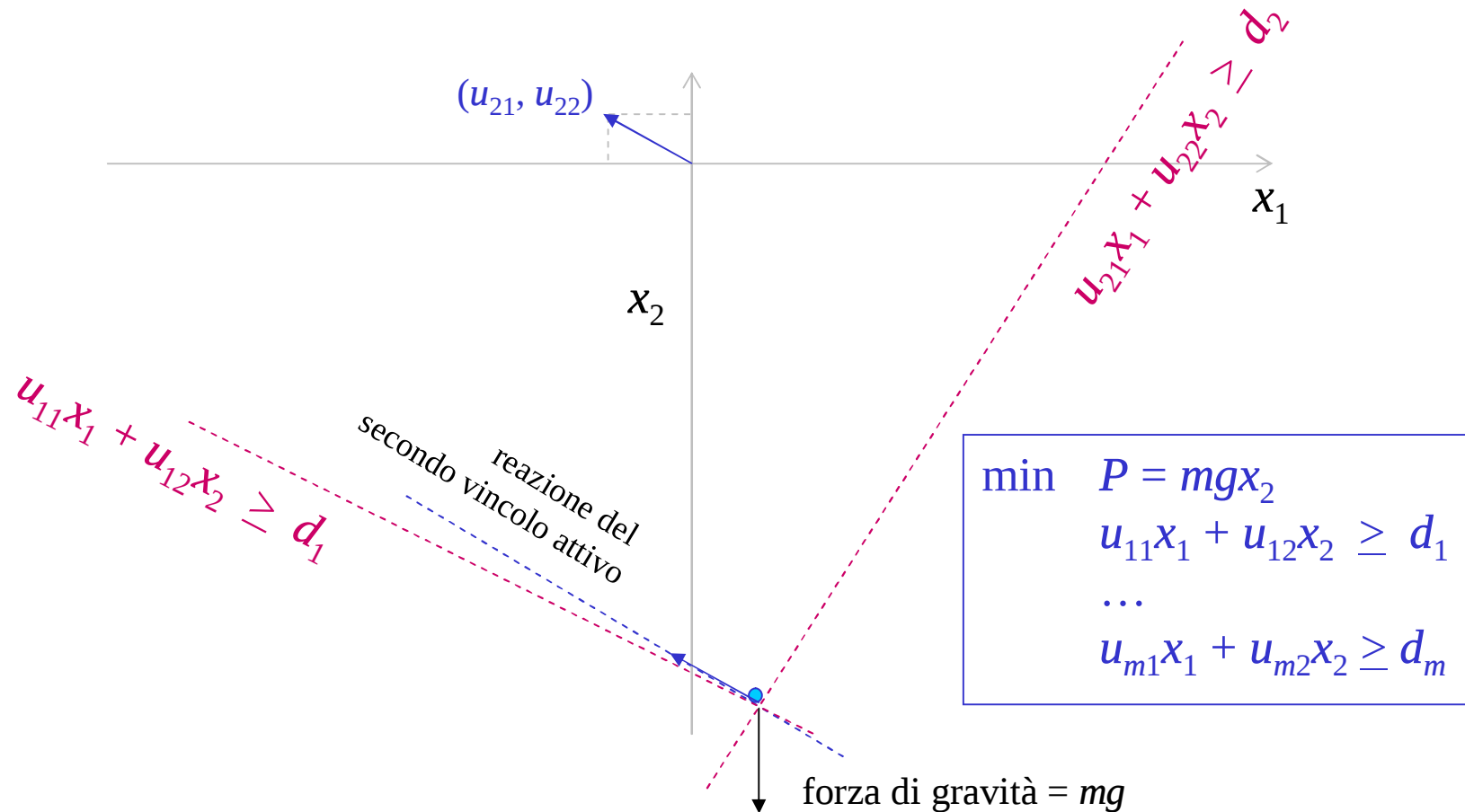
Galileiana

Normalizziamo i vincoli dividendo le disequazioni per $|\mathbf{a}_1|, \dots, |\mathbf{a}_m|$: la loro espressione contiene i versori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ e le distanze $d_1, \dots, d_m$ degli iperpiani dall'origine



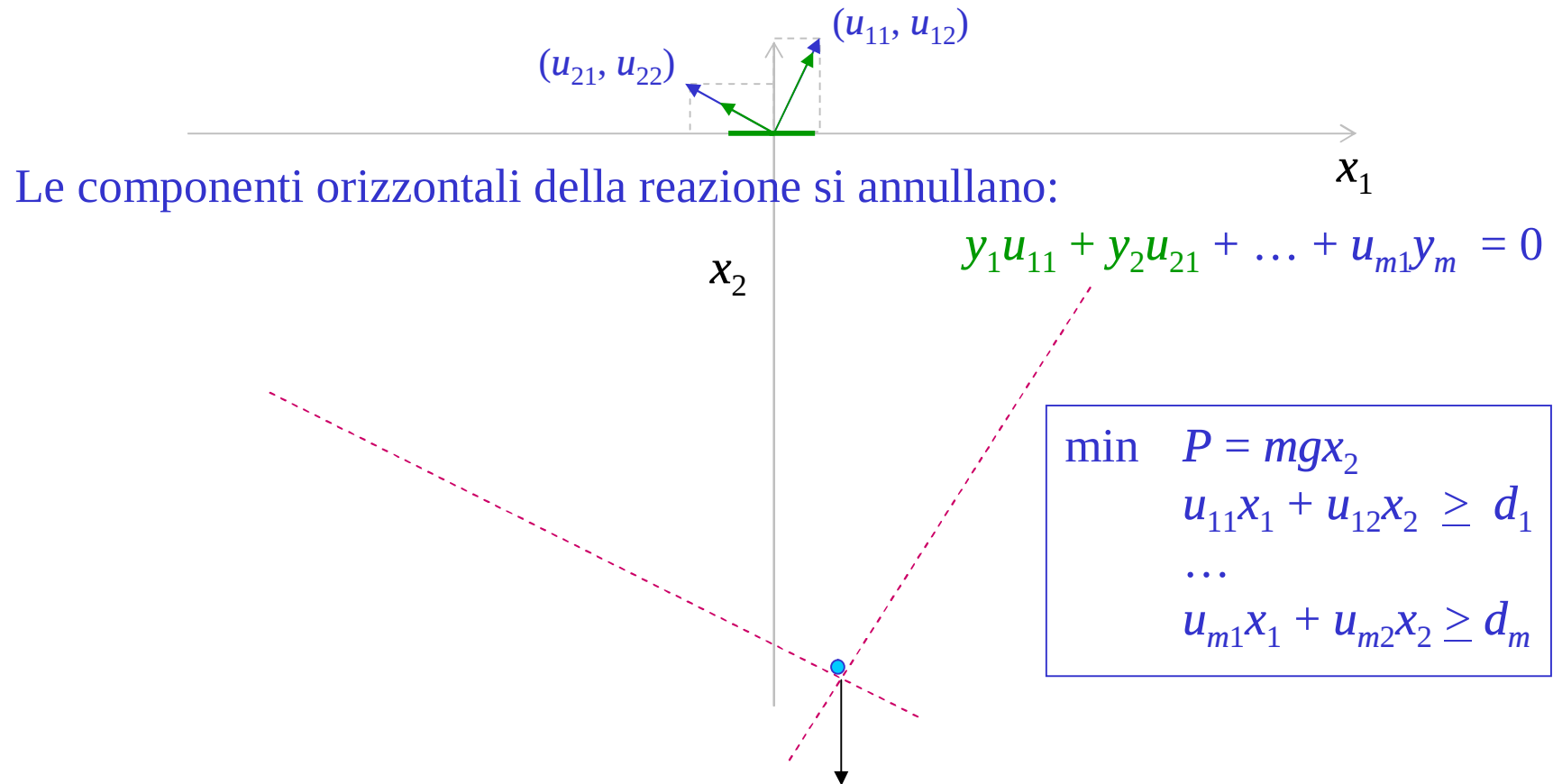
- Quale valore devono assumere le forze di reazione esercitate dai vincoli per opporsi alla forza di gravità?

Galileiana



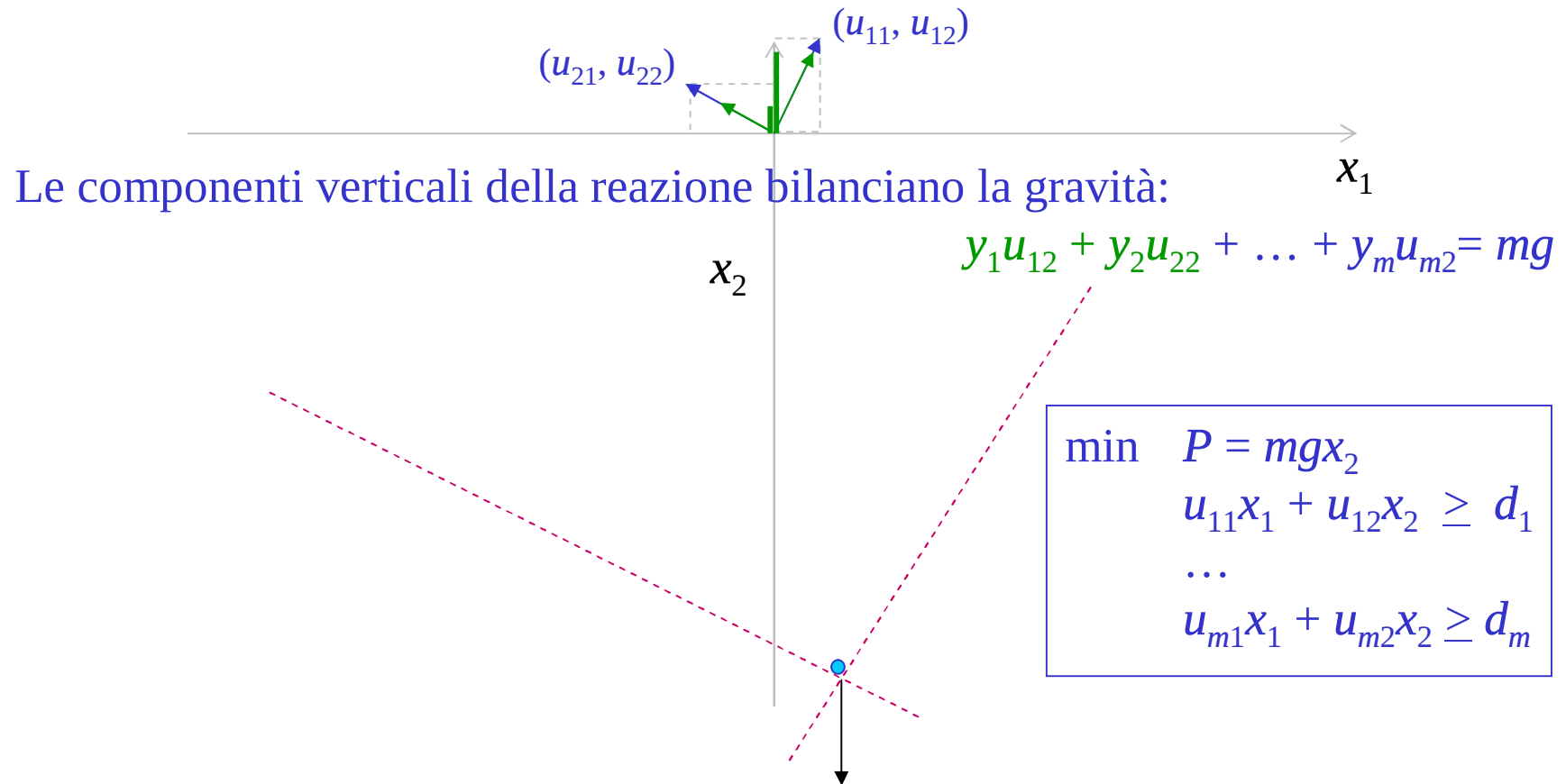
- Quale valore devono assumere le forze di reazione esercitate dai vincoli per opporsi alla forza di gravità?

Galileiana



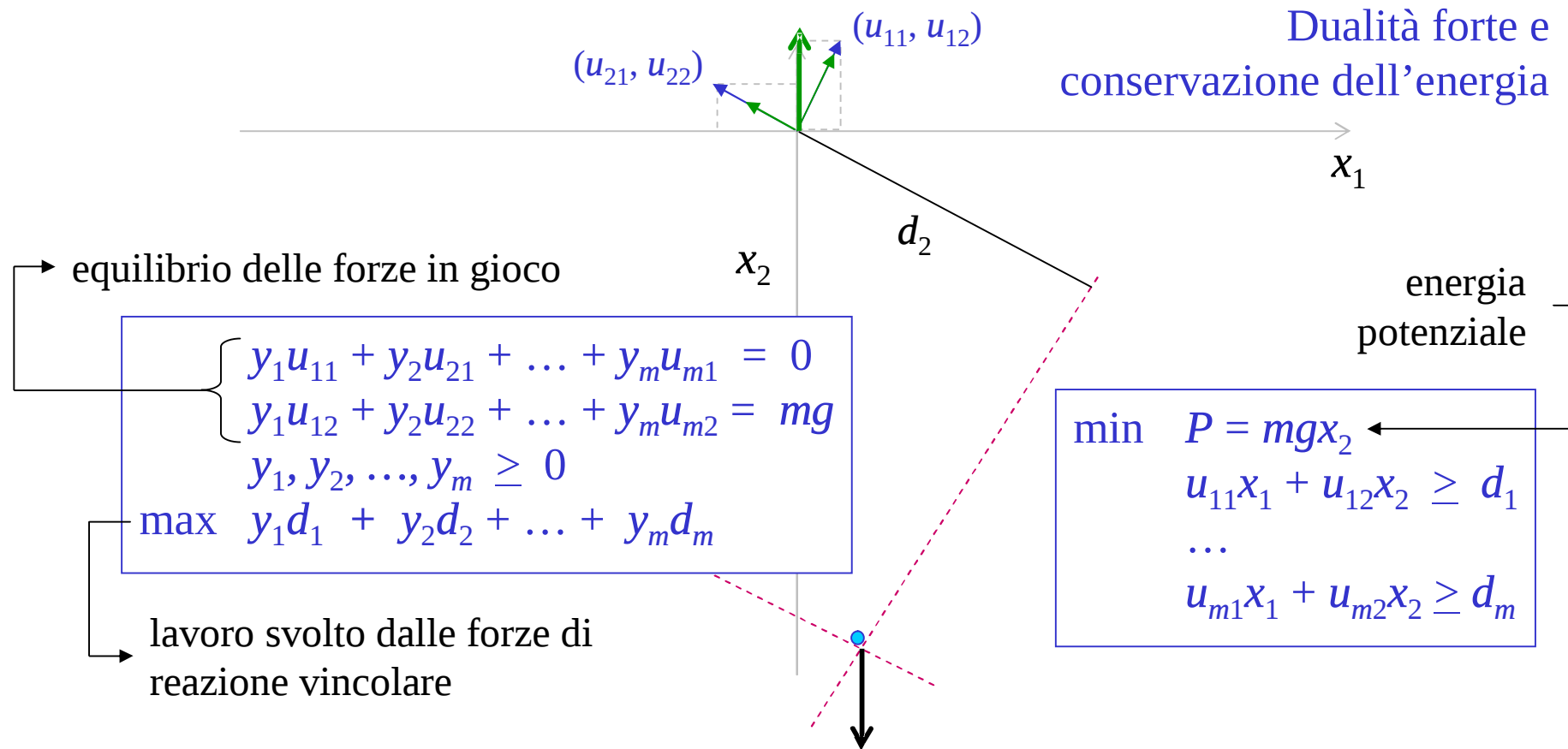
- y_i = intensità della forza di reazione del vincolo i
- $y_i = 0$ per $i = 3, \dots, m$ (vincoli inattivi)

Galileiana



- y_i = intensità della forza di reazione del vincolo i
- $y_i = 0$ per $i = 3, \dots, m$ (vincoli inattivi)

Galileiana



- y_i = intensità della forza di reazione del vincolo i

- $y_i = 0$ per $i = 3, \dots, m$
(vincoli inattivi)

Un problema più prosaico

Un pasticcere prepara due tipi di torte utilizzando un certo set di ingredienti. In dispensa trova 1,5 kg di farina, 3 di zucchero, 1 di cacao, 20 uova e 100 g di vaniglia.

<i>Torta</i>	<i>Ingredienti per kg</i>				
	<i>Farina (g)</i>	<i>Zucchero (g)</i>	<i>Uova (n.)</i>	<i>Vaniglia (g)</i>	<i>Cacao (g)</i>
Millefoglie	300	100	2	20	0
Profiterol	250	250	5	0	200
<i>Dispensa</i>	1500	3000	20	100	1000

Poiché il prezzo al chilo di una millefoglie è 24€ e di un profiterol è 28€, si chiede quale quantità di ciascuna torta sia conveniente produrre per massimizzare il ricavo

Un problema più prosaico

Il consumo di farina conseguente alla produzione di x_1 kg di millefoglie e x_2 kg di profiterol, espresso in grammi, è dato da:

$$300x_1 + 250x_2$$

Torta	Ingredienti per kg				
	Farina (g)	Zucchero (g)	Uova (n.)	Vaniglia (g)	Cacao (g)
Millefoglie	300	100	2	20	0
Profiterol	250	250	5	0	200
Dispensa	1500	3000	20	100	1000

Tale consumo non dovrà superare la disponibilità di farina:

$$300x_1 + 250x_2 \leq 1500$$

Un problema più prosaico

Perché la produzione risulti fattibile occorre quindi avere:

$$300x_1 + 250x_2 \leq 1500$$

$$100x_1 + 250x_2 \leq 3000$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$20x_1 \leq 100$$

$$200x_2 \leq 1000$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.

L'obiettivo di massimizzare i ricavi si esprime infine:

$$\max \quad 24x_1 + 28x_2$$

Un problema più prosaico

I vincoli del problema si possono riscrivere come segue:

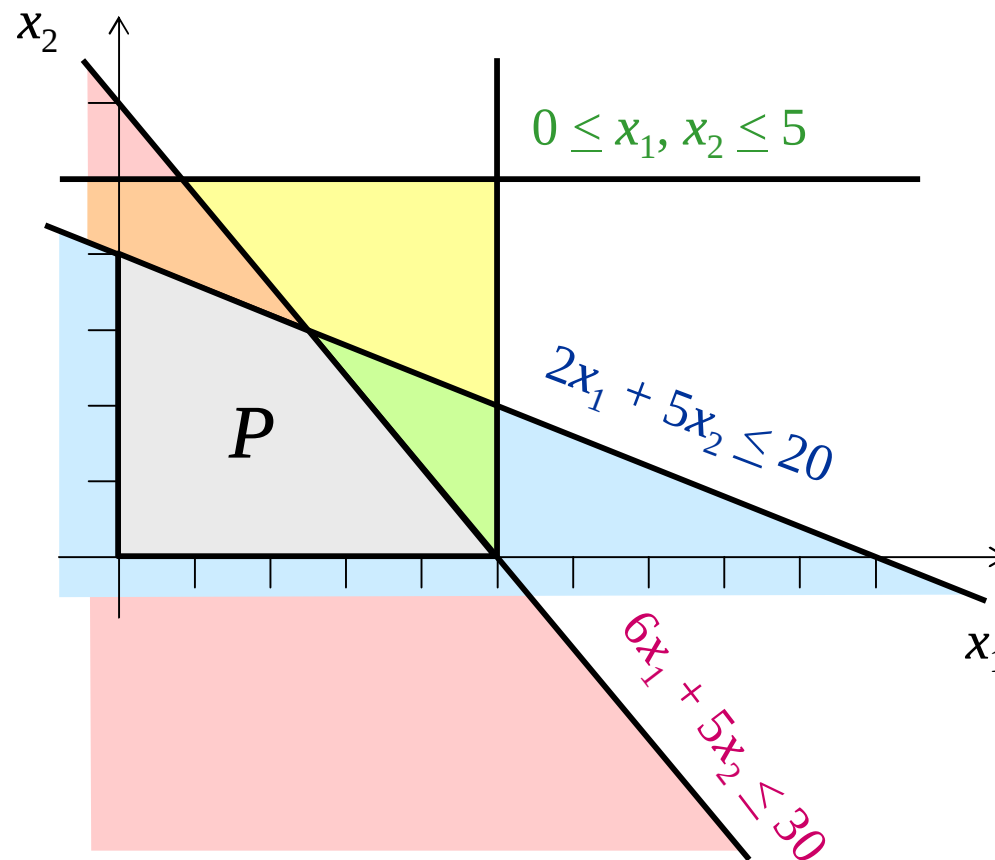
$$\begin{array}{rclcl} 6x_1 + & 5x_2 & \leq & 30 \\ \hline 2x_1 + & 5x_2 & \leq & 60 \\ 2x_1 + & 5x_2 & \leq & 20 \\ x_1 & & \leq & 5 \\ & x_2 & \leq & 5 \end{array}$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.

Osserviamo che il secondo vincolo è dominato dal terzo e può quindi essere eliminato.

Rappresentiamo il poliedro di questo problema di PL in $\mathbb{R}^2$.

Un problema più prosaico



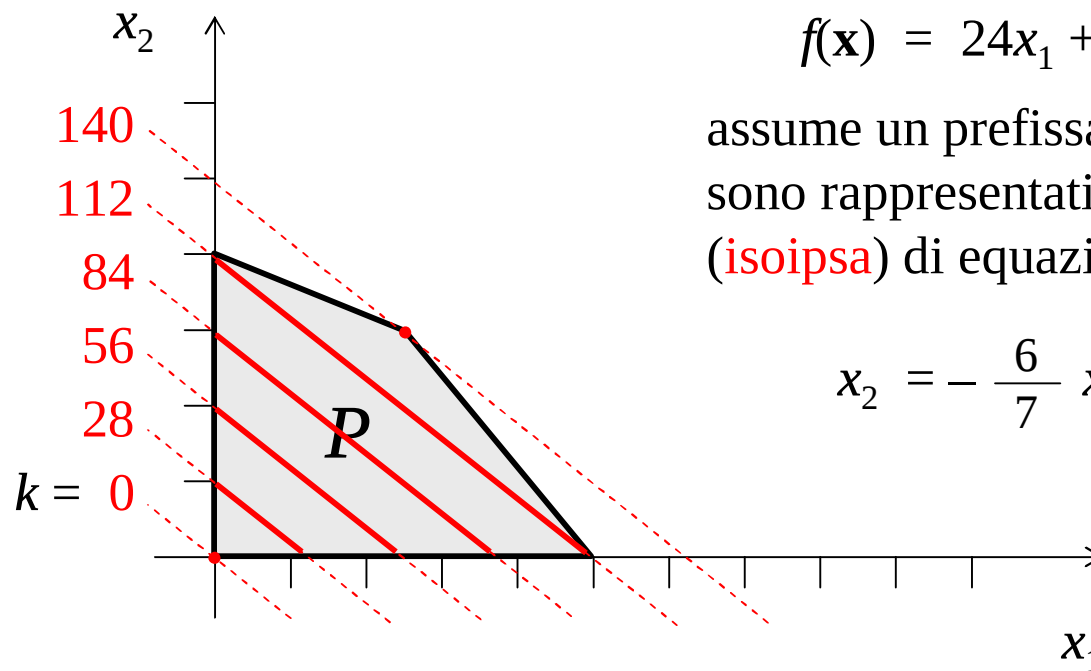
Direzione di miglioramento

Il luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali la funzione obiettivo

$$f(\mathbf{x}) = 24x_1 + 28x_2$$

assume un prefissato valore k sono rappresentati dalla retta (**isoipsa**) di equazione

$$x_2 = -\frac{6}{7}x_1 + \frac{k}{28}$$



L'intersezione della retta con P è luogo di punti soluzione aventi ugual valore k

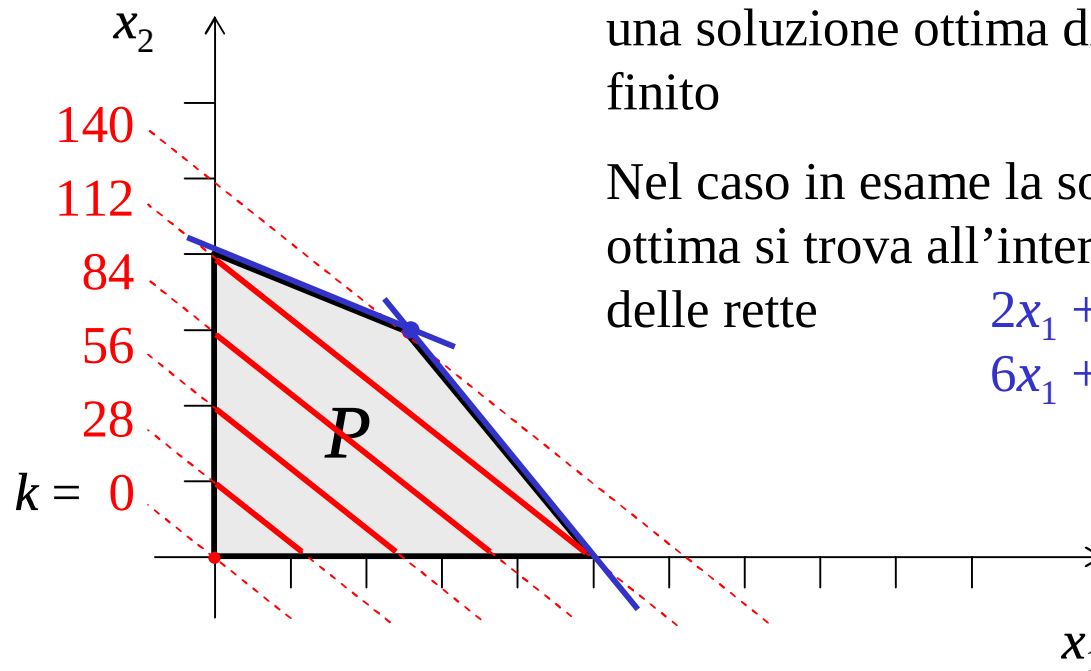
Direzione di miglioramento

Poiché P è limitato e non vuoto
il problema ammette certamente
una soluzione ottima di valore
finito

Nel caso in esame la soluzione
ottima si trova all'intersezione
delle rette

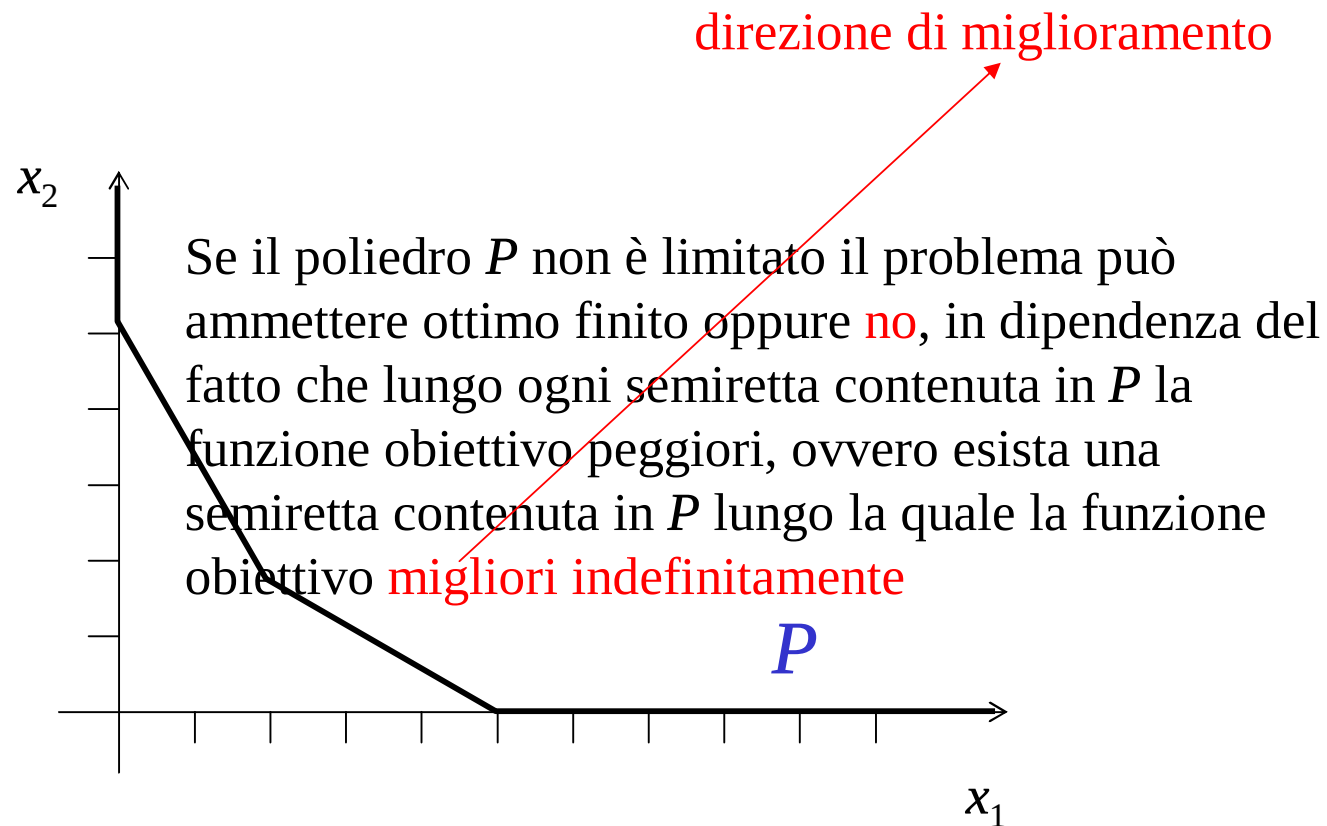
$$2x_1 + 5x_2 = 20$$

$$6x_1 + 5x_2 = 30$$



Essa corrisponde al punto $\mathbf{x}^*$ di coordinate $5/2, 3$ e il suo valore è $f(\mathbf{x}^*) = 144$.

Direzione di miglioramento



Per precisare questo concetto introduciamo la nozione di **direzione** di un poliedro P

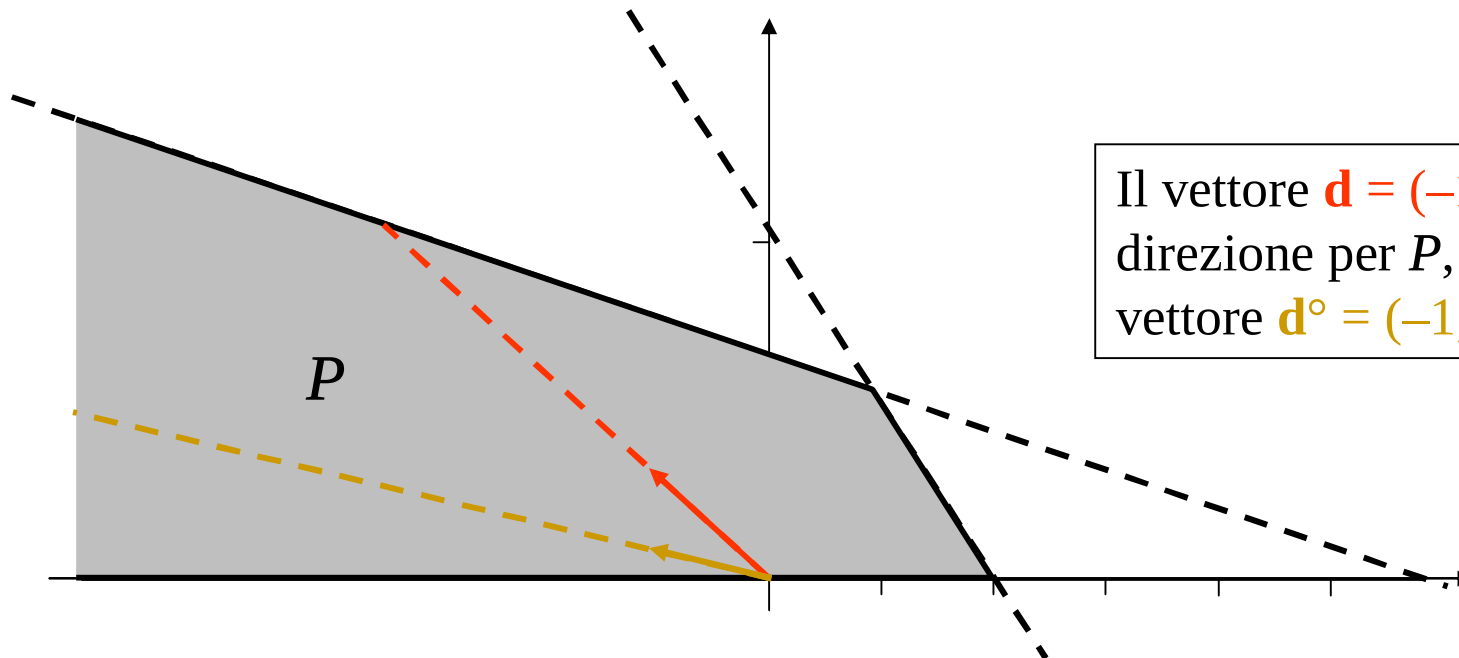
Direzioni di un poliedro

Sia $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro.

Definizione: Un vettore $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ si dice **direzione** di P se per ogni $\mathbf{x} \in P$ per ogni $l \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathbf{x} + l\mathbf{d} \in P$$

Esempio 1: Sia P definito dalle disequazioni $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_1 + 3x_2 \leq 6$
 $x_2 \geq 0$

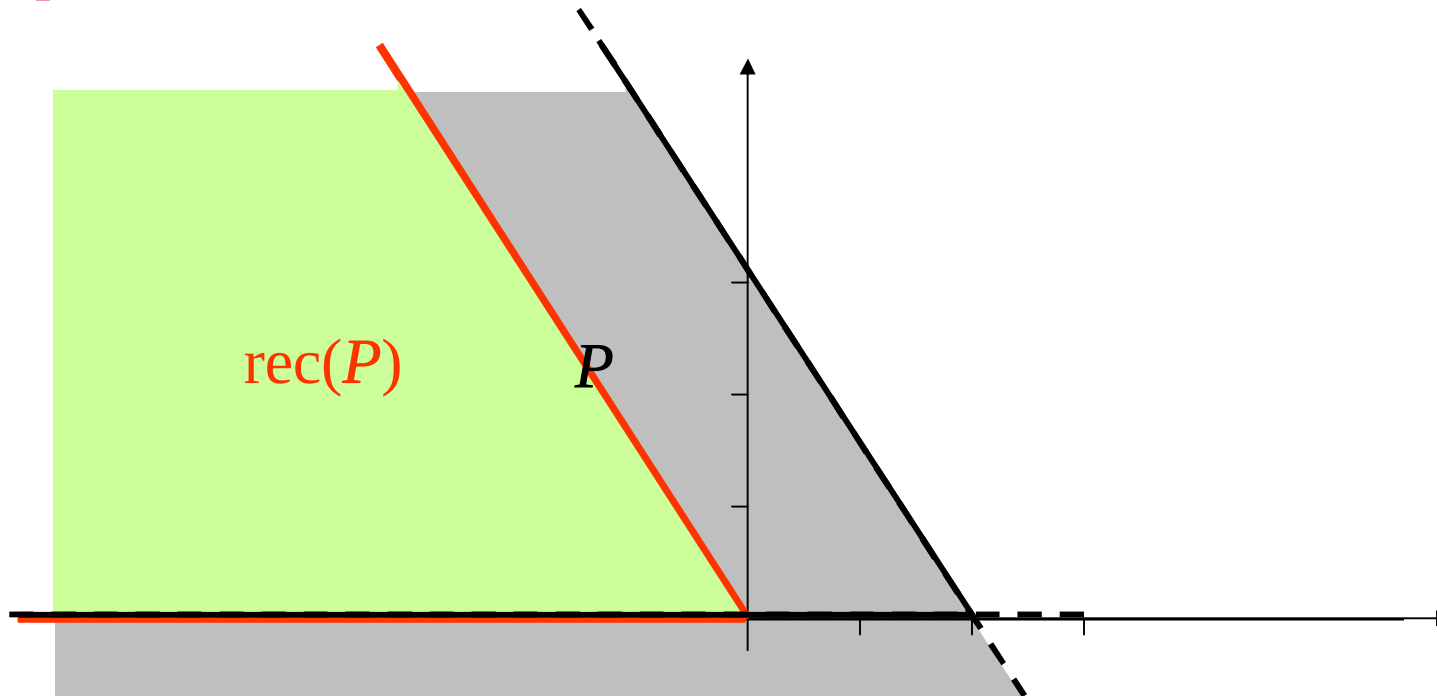


Il vettore $\mathbf{d} = (-1, 1)$ non è una direzione per P , mentre lo è il vettore $\mathbf{d}^o = (-1, \frac{1}{4})$

Direzioni di un poliedro

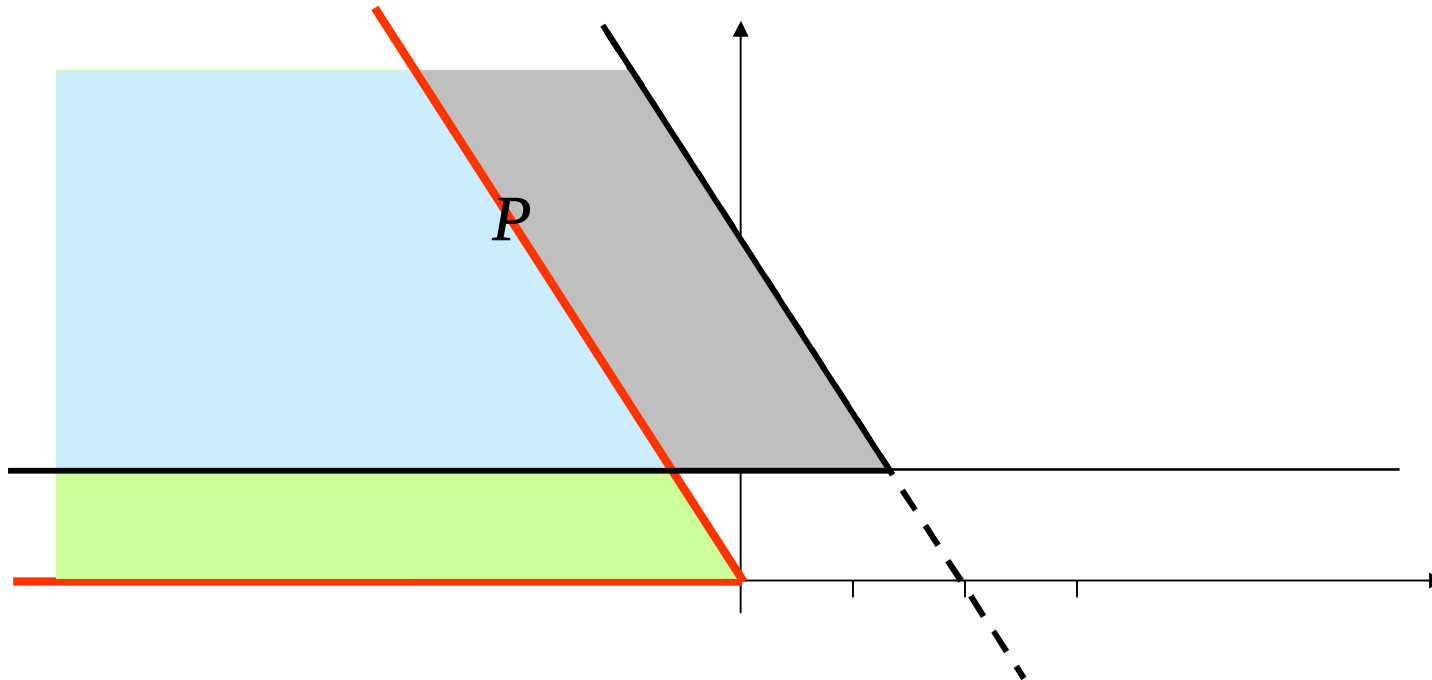
Definizione: L'insieme di tutti i vettori di che sono direzioni di P si dice cono di recessione di P , e si indica con $\text{rec}(P)$.

Esempio 2: Sia P definito dalle disequazioni $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_2 \geq 0$



Direzioni di un poliedro

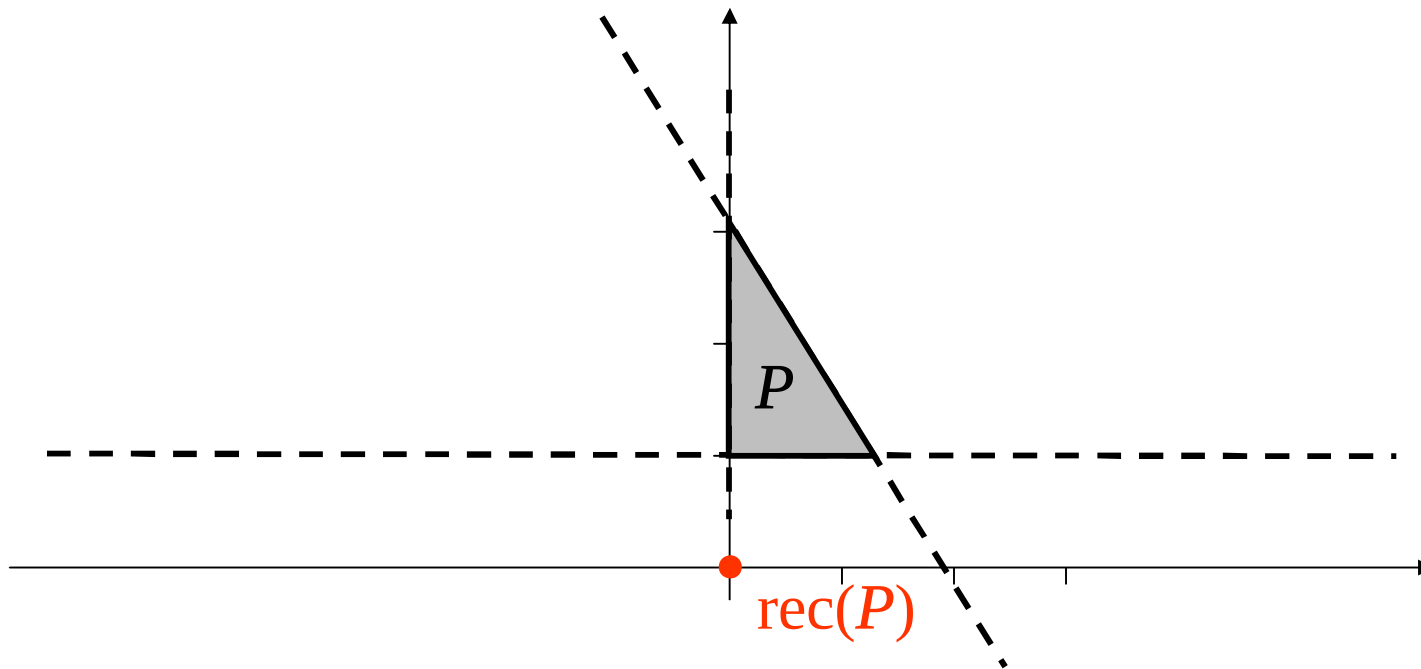
Esempio 3: Sia P definito dalle disequazioni $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_2 \geq 1$



Nota: $\text{rec}(P)$ è inalterato e non è contenuto in P

Direzioni di un poliedro

Esempio 4: Sia P definito dalle disequazioni $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_2 \geq 1$
 $x_1 \geq 0$



Nota: $\text{rec}(P)$ si riduce all'insieme $\{0\}$

Proprietà del cono di recessione

Teorema 1

$\forall$ poliedro P , $\text{rec}(P) \neq \emptyset$

Dimostrazione:

Per ogni $l > 0$ e $\mathbf{x} \in P$ si ha $\mathbf{x} + l\mathbf{0} = \mathbf{x} \in P$. Dunque $\mathbf{0} \in \text{rec}(P)$.

Teorema 2

Sia $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$. Allora

$$\text{rec}(P) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{Az} \leq \mathbf{0}\}$$

Dimostrazione:

Se per $\mathbf{z}$ si ha $\mathbf{Az} \leq \mathbf{0}$, allora $\mathbf{z}$ è una direzione per P :

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{Az} \leq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Ax} + l\mathbf{Az} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + l\mathbf{z}) \leq \mathbf{b} \quad \forall l > 0$$

Viceversa, se $\mathbf{z}$ è una direzione per P , allora $\mathbf{Az} \leq \mathbf{0}$:

(abs.) sia $\mathbf{A}(\mathbf{x} + l\mathbf{z}) \leq \mathbf{b} \quad \forall l > 0$, ma $\exists i$ per il quale $(\mathbf{Az})_i > 0$
allora scegliendo $l > [b_i - (\mathbf{Ax})_i] / (\mathbf{Az})_i$ si esce da P

Teorema di Weyl

Teorema 2 (Weyl, 1936)

Ogni punto $\mathbf{x}$ di un poliedro $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ con $\text{Ext}(P) \neq \emptyset$ può esprimersi come somma di un punto $\mathbf{u} \in \text{conv}(\text{Ext}(P))$ e di una direzione $\mathbf{d} \in \text{rec}(P)$:

$$P = \text{conv}(\text{Ext}(P)) + \text{rec}(P)$$

Esercizio:

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: -x_1 + 2x_2 \geq 2, x_1 - x_2 \geq -2, 5x_1 + 3x_2 \geq 15\}$$

$$\text{Ext}(P) = \{(24/13, 25/13), (9/8, 25/8)\}$$

$$\text{rec}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: -x_1 + 2x_2 \geq 0, x_1 - x_2 \geq 0, 5x_1 + 3x_2 \geq 0\}$$

- verificare che $(3, 3) \in P$
- trovare $\mathbf{u} \in \text{conv}(\text{Ext}(P))$, $\mathbf{d} \in \text{rec}(P)$ tali che $(3, 3) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

Teorema di Weyl

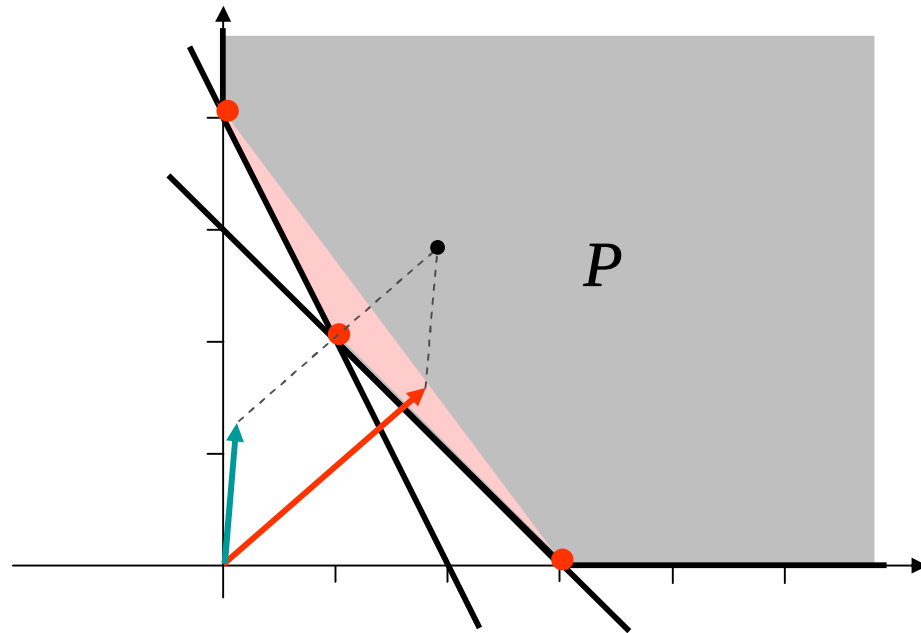
Esempio 5: Sia P definito dalle disequazioni

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 4 & x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ext}(P) = \{(0, 4), (1, 2), (3, 0)\}$$

$$\text{conv}(\text{Ext}(P))$$

$$\text{rec}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: x_1, x_2 \geq 0\}$$



Teorema fondamentale della PL

Consideriamo il problema in forma generale

$$\begin{array}{lll} P: & \max & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{array}$$

Teorema 3

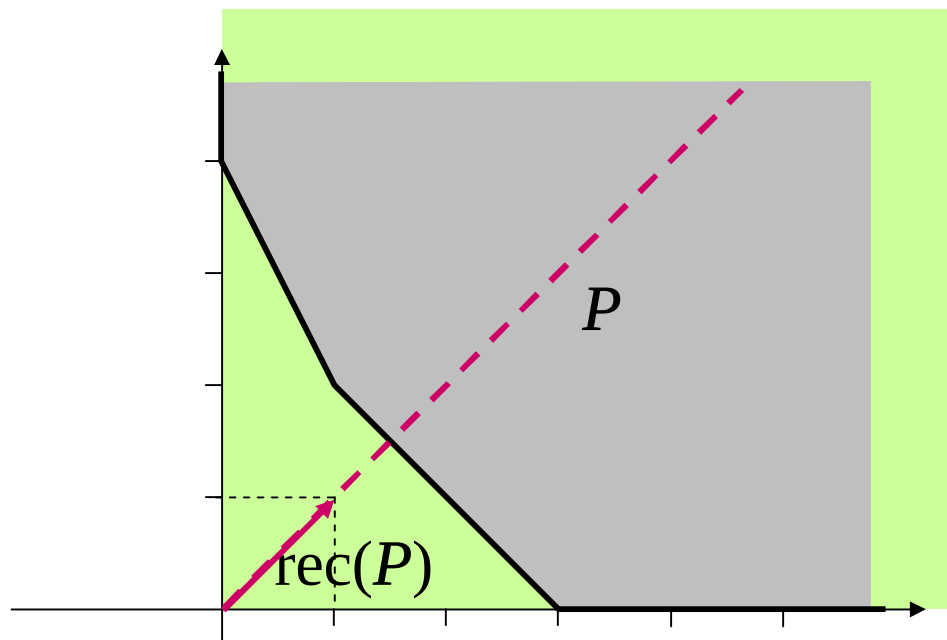
Sia $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$, e sia $\mathbf{x}^o \in P$. Allora

- 1) $\exists \mathbf{d} \in \text{rec}(P): \mathbf{c}\mathbf{d} > 0 \Rightarrow P$ illimitato
- 2) $\forall \mathbf{d} \in \text{rec}(P), \mathbf{c}\mathbf{d} \leq 0 \Rightarrow$ se $\text{Ext}(P) \neq \emptyset$, P ammette una soluzione ottima $\mathbf{x}^* \in \text{Ext}(P)$.

Teorema fondamentale della PL

Esempio 6: Consideriamo il problema P)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



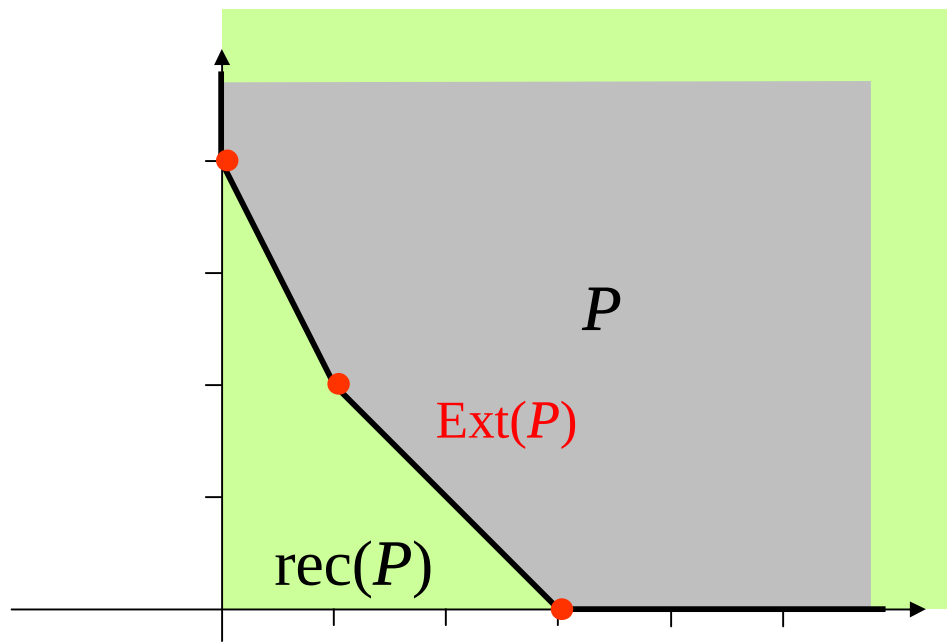
$$\begin{aligned} \text{cioè } \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ & -2x_1 - x_2 \leq -4 \\ & -x_1 - x_2 \leq -3 \\ & -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Per $\mathbf{d} = (1, 1)$ si ha
 $\mathbf{cd} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 > 0$

Quindi P è **illimitato**
superiormente

Teorema fondamentale della PL

Esempio 7: Consideriamo il problema P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$


cioè max

$$\begin{aligned} & -4x_1 - x_2 \\ & -2x_1 - x_2 \leq -4 \\ & -x_1 - x_2 \leq -3 \\ & -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Per ogni $\mathbf{d} \in \text{rec}(P)$
si ha ora $\mathbf{cd} \leq 0$

Quindi uno dei punti rossi
rappresenta una soluzione **ottima**

Teorema fondamentale della PL

Dimostrazione:

1) $\exists \mathbf{d} \in \text{rec}(P): \mathbf{c}\mathbf{d} > 0 \Rightarrow P$ illimitato

Per definizione di direzione, $\mathbf{x}^\circ \in P, \mathbf{d} \in \text{rec}(P) \Rightarrow \mathbf{x}^\circ + l\mathbf{d} \in P$ per ogni $l > 0$.

Sia per assurdo $\mathbf{x}^*$ ottima per P .

Quindi $\mathbf{c}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}(\mathbf{x}^\circ + l\mathbf{d})$.

Ma poiché $\mathbf{c}\mathbf{d} > 0$, ciò non è evidentemente vero per qualsiasi $l > 0$.

Dunque P è illimitato.

Teorema fondamentale della PL

2) $\forall \mathbf{d} \in \text{rec}(P), \mathbf{cd} \leq 0 \Rightarrow P$ ammette una soluzione ottima $\mathbf{x}^* \in \text{Ext}(P)$

Sia $E = \text{Ext}(P) = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ e sia k tale che $\mathbf{cv}_k \geq \mathbf{cv}_i$ $i = 1, \dots, p$.

Per il Teorema di Weyl, ogni $\mathbf{x} \in P$ si può scrivere $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{d}$, con $\mathbf{u} \in \text{conv}(E)$ e $\mathbf{d} \in \text{rec}(P)$. Si ha evidentemente

$$\mathbf{cx} = \mathbf{cu} + \mathbf{cd} \leq \mathbf{cu} \quad (\text{infatti per ipotesi } \mathbf{cd} \leq 0)$$

Inoltre

$$\mathbf{cu} = \mathbf{c}(l_1 \mathbf{v}_1 + \dots + l_p \mathbf{v}_p)$$

con $l_1 + \dots + l_p = 1, l_1, \dots, l_p \geq 0$ (infatti $\mathbf{u} \in \text{conv}(E)$)

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{cx} &\leq \mathbf{c}(l_1 \mathbf{v}_1 + \dots + l_p \mathbf{v}_p) = l_1 \mathbf{cv}_1 + \dots + l_p \mathbf{cv}_p \leq \\ &\leq (l_1 + \dots + l_p) \mathbf{cv}_k = \mathbf{cv}_k \end{aligned}$$

Se ne deduce che $\mathbf{v}_k \in \text{Ext}(P)$ è una soluzione ottima per P .