Sistemi compatibili

(Il metodo di Fourier-Motzkin)

Claudio Arbib

Università degli Studi di L'Aquila

Sommario

1. Poliedri

Definizione:

Siano $\mathbf{a} \in \mathrm{IR}^n$, $b \in \mathrm{IR}$. L'insieme

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \colon \mathbf{ax} = b\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

si dice iperpiano. L'insieme

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \colon \mathbf{ax} \leq b\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

si dice semispazio chiuso.

Definizione:

Un poliedro è l'intersezione di un numero finito m di semispazi chiusi di IR^n.

Quindi $\forall\ \mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^m$ l'insieme

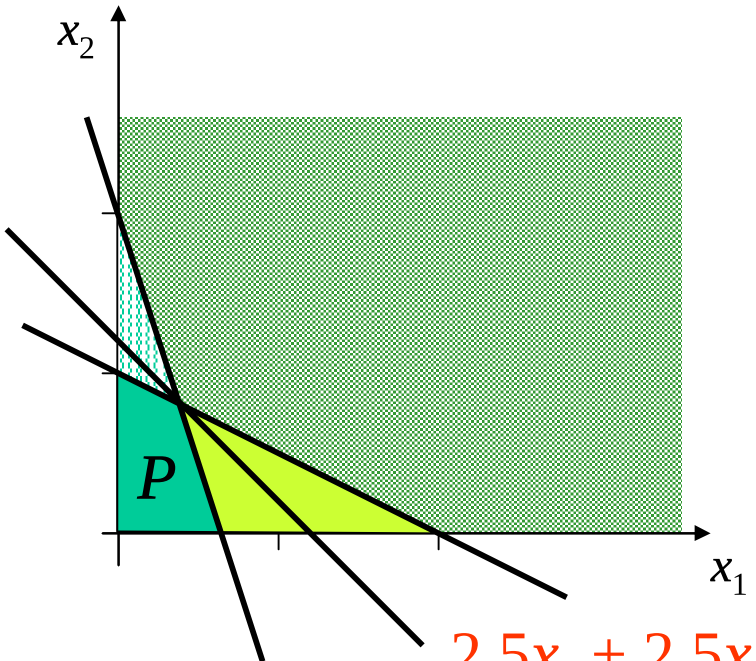
$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \colon \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

definisce un poliedro. In particolare, $\emptyset$, H, S, IR^n sono poliedri.

2. Diseguaglianze implicate

Definizione:

b**x** ≤ g è una diseguaglianza implicata dal sistema **Ax** ≤ **b** se ogni **x** che soddisfa **Ax** ≤ **b** soddisfa anche b**x** ≤ g



$2.5x_1 + 2.5x_2 \leq 1.5$

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

Diseguaglianze implicate

Definizione:

Un sistema di diseguaglianze è minimale se non contiene diseguaglianze implicate.

Definizione:

b$\mathbf{x} \le \gamma$ è combinazione conica delle diseguaglianze
$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$ º $\{\mathbf{a}_i\mathbf{x} \le b_i\,,\ i = 1, \ldots, m\}$ se e solo se

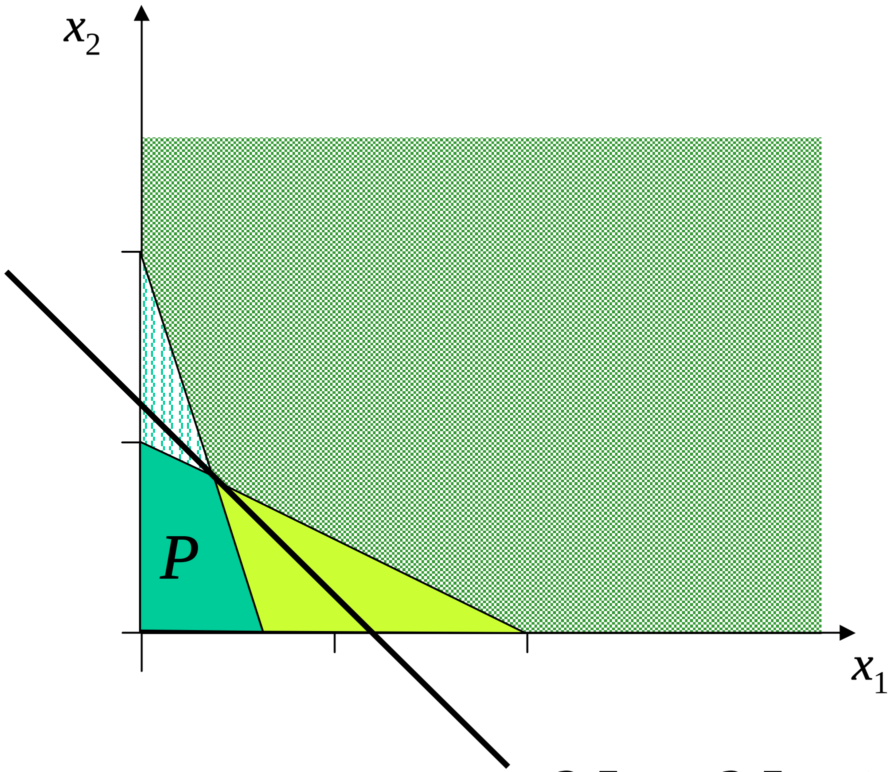
$$(\mathrm{b}, \gamma) = \sum l_i(\mathbf{a}_i, b_i) \qquad l_i \ge 0$$

Teorema:

Ogni diseguaglianza ottenuta come combinazione conica di $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$ è una diseguaglianza implicata.

Diseguaglianze implicate

Esempio:



$$
\begin{array}{rl}
0(& x_1 \qquad\qquad \geq 0 \;) + \\
0(& \qquad\quad\; x_2 \geq 0 \;) + \\
1(& x_1 + 2x_2 \leq 1 \;) + \\
0.5(& 3x_1 + x_2 \leq 1 \;) = \\
\hline
 & 2.5x_1 + 2.5x_2 \leq 1.5
\end{array}
$$

$$l = (0, 0, 1, 0.5)$$

3. Poliedri compatibili

Definizione:

Un poliedro si dice compatibile (incompatibile) se (non) ammette soluzione.

Problema:

Stabilire se un dato poliedro $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ è o no compatibile

Principio:

Ciò che esiste, fa ombra

(Corollario: i vampiri non esistono)

4. Proiezione di un poliedro

Definizione: Sia $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathrm{IR}^n$ un poliedro.

Allora il poliedro $P(\mathbf{A}', \mathbf{b}') \subseteq \mathrm{IR}^{n-1}$ si dice proiezione di $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ se $\mathbf{x} \in P(\mathbf{A}', \mathbf{b}') \Leftrightarrow \exists z \in \mathrm{IR}$ tale che $(\mathbf{x}, z) \in P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Esempio:

P: $\quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P': $\quad 0 \leq x_1 \leq 2$

poniamo $z = (6 - 3x_1)/2 \geq 0 \qquad \forall x_1 \in P'$

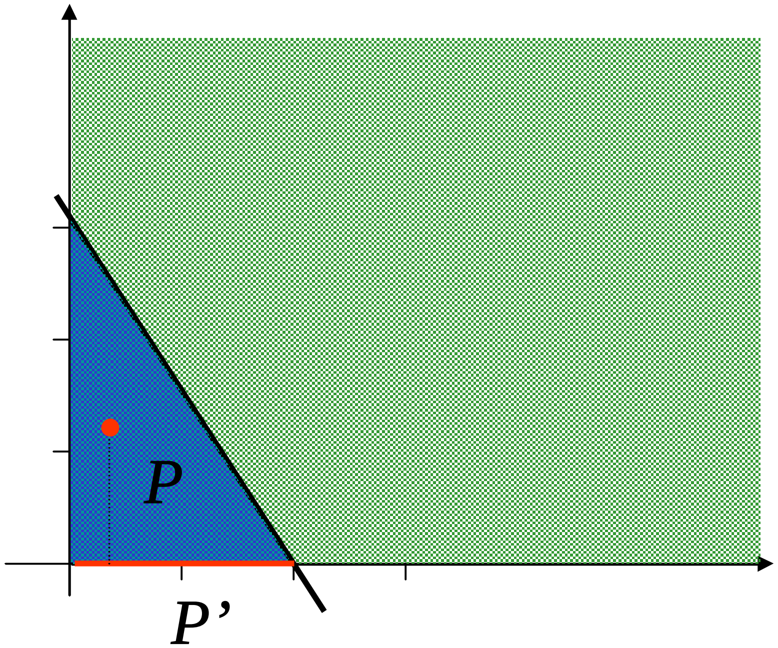
evidentemente $(x_1, (6 - 3x_1)/2) \in P \qquad \forall x_1 \in P'$

Proiezione di un poliedro

Esempio:

P : $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P': $0 \leq x_1 \leq 2$



$\forall x_1 \in P', \exists z: (x_1, z) \in P$

$\forall (x_1, x_2) \in P, x_1 \in P'$

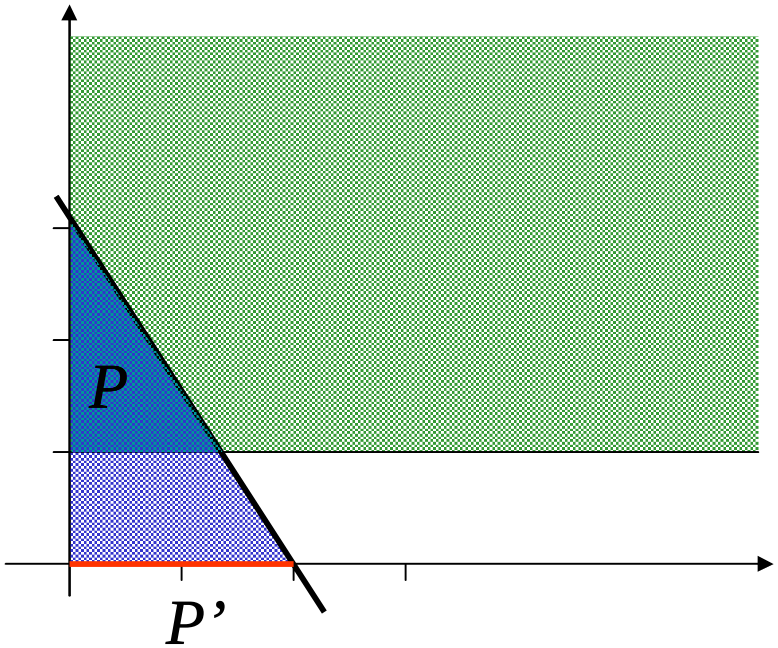
$\Rightarrow$ P' è proiezione di P

Proiezione di un poliedro

Esempio:

P : $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 1$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P': $0 \leq x_1 \leq 2$



$\nexists\ \mathbf{x} \in P$ tale che $x_1 = 2$

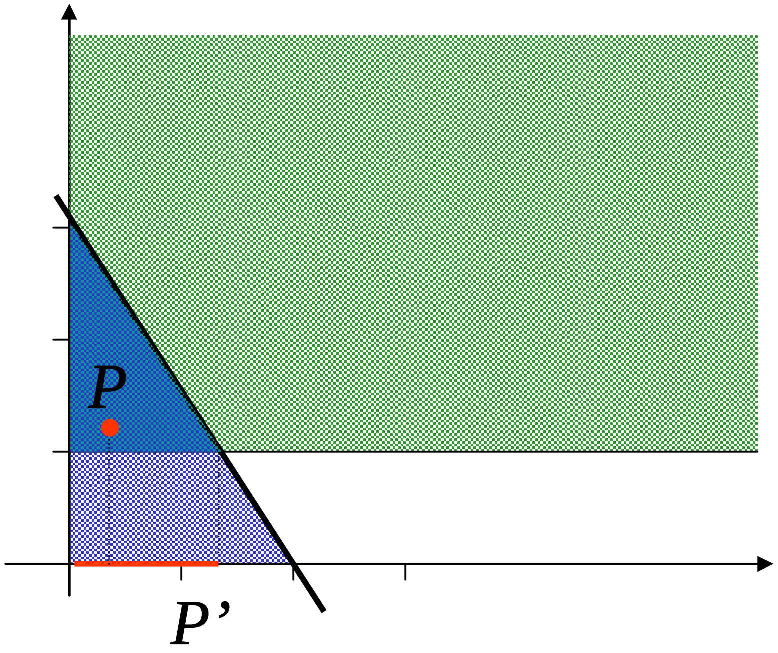
$\Rightarrow$ P' non è proiezione di P

Proiezione di un poliedro

Esempio:

P : $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 1$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P' : $0 \leq x_1 \leq 4/3$



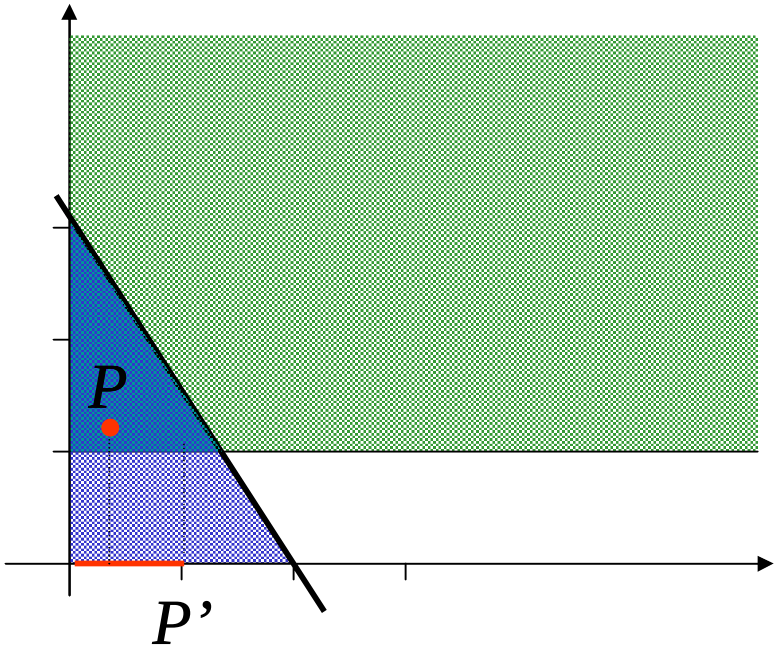
P' è proiezione di P?

Proiezione di un poliedro

Esempio:

$P\ :\quad x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 1 \qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$P'\ :\quad 0 \leq x_1 \leq 1$



P' è proiezione di *P*?

5. Teorema di Fourier

Sia dato il poliedro P

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m
\end{aligned}
$$

Dividiamo l'insieme delle righe R in 3 sottoinsiemi:

$$R_0 = \{i \in R\colon a_{i1} = 0\},\ R^+ = \{i \in R\colon a_{i1} > 0\},\ R^- = \{i \in R\colon a_{i1} < 0\}$$

Costruiamo un nuovo poliedro P' contenente:

1) tutte le diseguaglianze di R_0
2) una diseguaglianza per ogni elemento in $R^+ \times R^-$

Teorema di Fourier

- Una diseguaglianza del tipo (2) è associata a una riga $h \in R^+$ e una riga $k \in R^-$

$$a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hn}x_n \leq b_h \quad \Leftarrow \boxed{\text{riga } h}$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k \quad \Leftarrow \boxed{\text{riga } k}$$

- La diseguaglianza di *P'* si ottiene per combinazione conica delle due
  - dividendo la prima per a_{h1}
  - dividendo la seconda per $|a_{k1}|$
  - sommandole insieme

$$\cancel{\left(\frac{a_{h1}}{a_{h1}} + \frac{a_{k1}}{|a_{k1}|}\right)} x_1 + \left(\frac{a_{h2}}{a_{h1}} + \frac{a_{k2}}{|a_{k1}|}\right) x_2 + \ldots + \left(\frac{a_{hn}}{a_{h1}} + \frac{a_{kn}}{|a_{k1}|}\right) x_n \leq \left(\frac{b_h}{a_{h1}} + \frac{b_k}{|a_{k1}|}\right)$$

Teorema di Fourier

Osservazione: Il nuovo sistema di diseguaglianze P' non contiene la variabile x_1

Teorema (Fourier) *P'* è una proiezione di *P* nello spazio delle variabili $x_2, \ldots, x_n$.

Dimostrazione

- Sia $\mathbf{w} = (w_2, \ldots, w_n) \in P'$. Dobbiamo mostrare che esiste uno scalare z tale che $(z, w_2, \ldots, w_n) \in P$.
- Per ogni $i \in R_0$ si ha $a_{i2}w_2 + \ldots + a_{in}w_n \leq b_i$
- Per ogni $h \in R^+$, $k \in R^-$ si ha inoltre

$$\left(\frac{a_{h2}}{a_{h1}} + \frac{a_{k2}}{|a_{k1}|}\right) w_2 + \ldots + \left(\frac{a_{hn}}{a_{h1}} + \frac{a_{kn}}{|a_{k1}|}\right) w_n \leq \left(\frac{b_h}{a_{h1}} + \frac{b_k}{|a_{k1}|}\right)$$

Teorema di Fourier

- Riscriviamo l'ultima condizione

$$\frac{a_{k2}w_2}{|a_{k1}|} + \ldots + \frac{a_{kn}w_n}{|a_{k1}|} - \frac{b_k}{|a_{k1}|} \leq \frac{b_h}{a_{h1}} - \frac{a_{h2}w_2}{a_{h1}} - \ldots - \frac{a_{hn}w_n}{a_{h1}}$$

- Al variare di k in R^- (di h in R^+) il primo (secondo) membro descrive una classe C (una classe D) di numeri reali, e tutti gli elementi di C risultano $\leq$ degli elementi di D
- Dunque esiste un elemento di separazione z tale che:

$$\frac{a_{k2}w_2}{|a_{k1}|} + \ldots + \frac{a_{kn}w_n}{|a_{k1}|} - \frac{b_k}{|a_{k1}|} \leq z \qquad \forall k \in R^-$$

$$\forall h \in R^+ \qquad z \leq \frac{b_h}{a_{h1}} - \frac{a_{h2}w_2}{a_{h1}} - \frac{a_{hn}w_n}{a_{h1}}$$

Teorema di Fourier

- Le ultime due diseguaglianze si possono riscrivere:

$$a_{k1}z + a_{k2}w_2 + \dots a_{kn}w_n \;\leq\; b_k \qquad \forall k \in R^-$$

$$a_{h1}z + a_{h2}w_2 + \dots a_{hn}w_n \;\leq\; b_h \qquad \forall h \in R^+$$

- Inoltre, $\forall i \in R_0$ si ha

$$0z + a_{i2}w_2 + \dots a_{in}w_n \;\leq\; b_i$$

- Ne segue che $(z, w_2, \dots, w_n) \in P$
- Per concludere la dimostrazione dobbiamo viceversa far vedere che comunque si prenda $\mathbf{w} \notin P'$ non esiste $z \in$ IR per il quale $(z, \mathbf{w}) \in P$.

Teorema di Fourier

- Dire che $\mathbf{w} \notin P'$ significa dire che

$$a_{i2}w_2 + \ldots a_{in}w_n > b_i \qquad \text{per qualche } i \in R_0\text{, oppure}$$

$$C \ni \left[\frac{a_{k2}w_2}{|a_{k1}|} + \ldots + \frac{a_{kn}w_n}{|a_{k1}|} - \frac{b_k}{|a_{k1}|} \right] > \left[\frac{b_h}{a_{h1}} - \frac{a_{h2}w_2}{a_{h1}} - \ldots - \frac{a_{hn}w_n}{a_{h1}} \right] \in D$$

per qualche $(h, k) \in R^{+} \times R^{-}$

- Nel primo caso è ovviamente violata la corrispondente disequazione di P.
- Nel secondo, esiste un elemento della classe C che risulta maggiore di un elemento della classe D, quindi queste non ammettono alcun separatore z.

Fine della dimostrazione

6. Algoritmo di Fourier-Motzkin

- Il Teorema di Fourier permette di ridurre il problema di decidere se un poliedro è o meno vuoto a quello di decidere se è o meno vuota una sua proiezione
- Poiché la proiezione di un poliedro è ancora un poliedro, il teorema può essere ripetutamente applicato, fino a pervenire a un poliedro del quale sia semplice decidere
- Ad esempio, si può applicare il teorema $n - 1$ volte: in questo caso il poliedro risultante $P^{(n-1)}$ sarà un intervallo dell'asse reale, eventualmente vuoto o illimitato
- Ovvero, si può applicare il teorema per n volte: in questo caso il poliedro risultante $P^{(n)}$ avrà la forma $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{t}$. Si danno allora 2 casi:
  - se $\mathbf{t} \geq 0$, $P^{(n)}$ è banalmente compatibile, in quanto descrive l'intero IR^n, e quindi anche P è compatibile;
  - se esiste un indice i tale che $t_i < 0$, allora $P^{(n)}$ è banalmente incompatibile, e così P.

7. Applicazioni

- L'applicazione ripetuta del Teorema di Fourier costituisce il Metodo di Eliminazione di Fourier-Motzkin
- Questo metodo si può applicare per
  - Decidere se un poliedro è vuoto oppure no
  - Costruire la rappresentazione implicita di conv(S) per un insieme finito $S \subset \mathbb{R}^n$
  - Risolvere un problema di Programmazione Lineare

Esempio

Sia P il poliedro costituito dalle $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3$ tali che

$$
\begin{array}{rcccl}
3x_1 - x_2 & & \leq & & 4 \\
x_1 & - 2x_3 & \leq & & -6 \\
2x_1 + 2x_2 & + \; x_3 & \leq & & 2 \\
x_1 & & \geq & & 0
\end{array}
$$

Vogliamo capire se $P \neq \emptyset$

Esempio

Riportiamo tutte le diseguaglianze in forma di $\leq$, e costruiamo una tabella contenente i coefficienti del sistema

1)	3	–1	0	4
2)	1	0	–2	–6
3)	2	2	1	2
4)	–1	0	0	0

(in colore rosso sono riportati i termini noti
in blu gli indici di riga)

Esempio

1)	3	–1	0	4
2)	1	0	–2	–6
3)	2	2	1	2
4)	–1	0	0	0

Scegliamo una variabile (colonna) da eliminare. La scelta può essere effettuata in base al numero di nuove righe generate dall’eliminazione.

- Dall’eliminazione della colonna 1 nascono 3×1 = 3 nuove righe.
- Dall’eliminazione della colonna 2 o della colonna 3 ne nascono 2 + 1×1 = 3.

Decidiamo di eliminare la colonna 2, in quanto 2 delle nuove righe provengono dall’insieme R_0, e sono pertanto già presenti in tabella.

Esempio

1)	3	–1	0	4
2)	1	0	–2	–6
3)	2	2	1	2
4)	–1	0	0	0

Gli insiemi R_0, R^+ e R^- risultano così costituiti:

$$R_0 = \{2, 4\} \qquad R^+ = \{3\} \qquad R^- = \{1\}$$

Pertanto, $R^+ \times R^-$ contiene la sola coppia 31.

La riga corrispondente si ottiene moltiplicando per 2 la riga 1 e sommandola alla riga 3. La tabella si riscrive

2)	1	0	–2	–6
4)	–1	0	0	0
31)	8	0	1	10

Esempio

Rinumeriamo le righe della tabella ottenuta.

1)	1	0	–2	–6
2)	–1	0	0	0
3)	8	0	1	10

Conviene ora applicare il metodo alla colonna 3. Si ha

$$R_0 = \{2\}, R^+ = \{3\}, \ R^- = \{1\}$$

e ancora una volta $R^+ \times R^-$ contiene la sola coppia 31.

La riga corrispondente si ottiene moltiplicando per 2 la riga 3 e sommandola alla riga 1. La tabella si riscrive

2)	–1	0	0	0
31)	17	0	0	14

Esempio

Questa tabella corrisponde al sistema

1) $x_1 \geq 0$

2) $17x_1 \leq 14$

La proiezione *P"* di *P* sull'asse x_1 è dunque rappresentata dall'intervallo (non vuoto) [0, 14/17]. Quindi anche *P* è non vuoto. In particolare possiamo ottenere un punto di P scegliendo un $x_1 \in P"$ e ricavando x_2 e x_3 in base alle tabelle precedenti.

Poniamo ad esempio $x_1 = 0$. Dalla prima tabella della pagina precedente ricaviamo le condizioni

1) $-2x_3 \leq -6$ cioè $x_3 \geq 3$

3) $x_3 \leq 10$

Quindi $x_3 \in [3, 10]$. Possiamo scegliere ad esempio $x_3 = 4$.

Esempio

Sostituendo ora $x_1 = 0$ e $x_3 = 4$ nella tabella iniziale

1)	3	–1	0	4
2)	1	0	–2	–6
3)	2	2	1	2
4)	–1	0	0	0

ricaviamo le condizioni

$$-x_2 \leq 4$$

$$2x_2 + 4 \leq 2$$

vale a dire $x_2 \in [-4, -1]$. Una soluzione del sistema è quindi ad esempio

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 4$$