Claudio Arbib
Università di L'Aquila

Ricerca Operativa

Alcuni problemi combinatorici

(Gennaio 2006)

Alcuni problemi interessanti

Problema 1: Le torri

Problema 2: A una festa di laurea

Problema 3: La rete telematica

Problema 4: Il Grande Fratello

Problema 5: Produzione del vetro

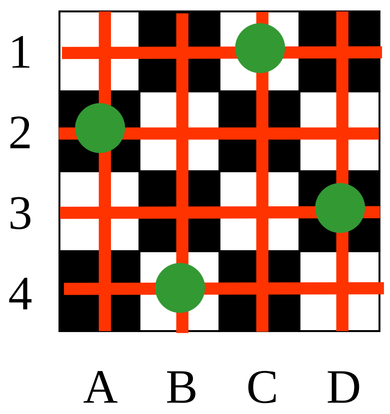
Problema 6: Arredamento

Problema 1 (Le torri)

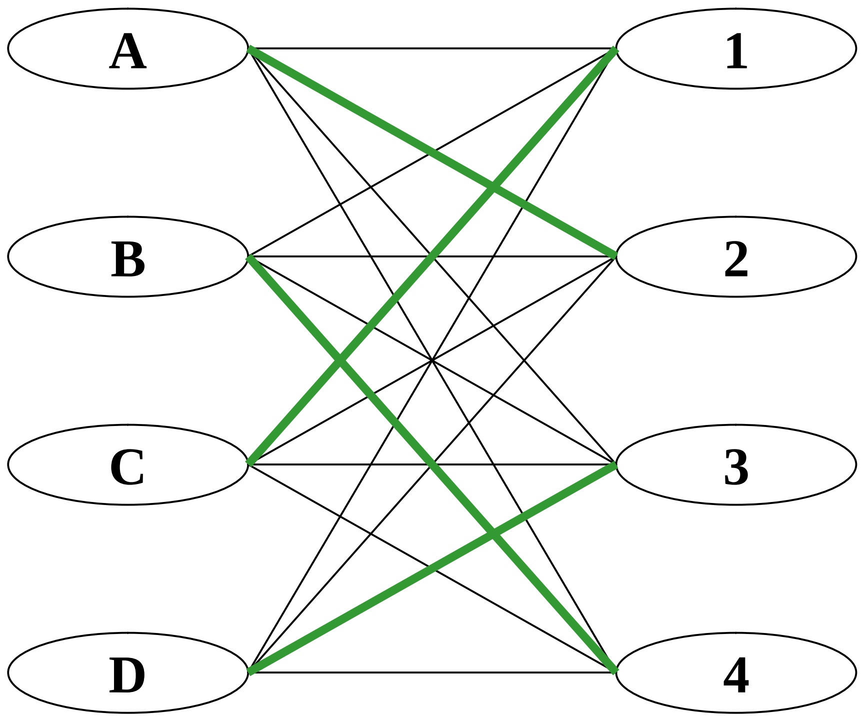
Qual è il massimo numero di torri che è possibile disporre su una scacchiera senza che esse si diano scacco reciproco?

Formulazione

Due torri si danno scacco se si trovano sulla medesima riga o colonna.



Grafo intersezione righe-colonne



Formulazione

U = insieme degli archi del grafo G

$\Im$ = famiglia degli insiemi di archi che toccano ogni vertice del grafo G non più di una volta (matching)

c = funzione che associa a ogni arco del grafo G un costo pari a 1

Il problema, della forma

$$\max_{X \in \Im} c(X)$$

consiste nel trovare all'interno di G un matching di peso massimo.

Problema 2 (A una festa di laurea)

n ragazzi e m ragazze si incontrano a una festa di laurea.

Ciascuno di loro dà mentalmente un punteggio p da 0 a 10 alle persone di sesso diverso dal proprio in base all'attrazione provata (0 = attrazione minima, 10 = attrazione massima).

Supponiamo di definire l'attrazione reciproca di una coppia come il prodotto dei punteggi che ciascun membro della coppia assegna al partner.

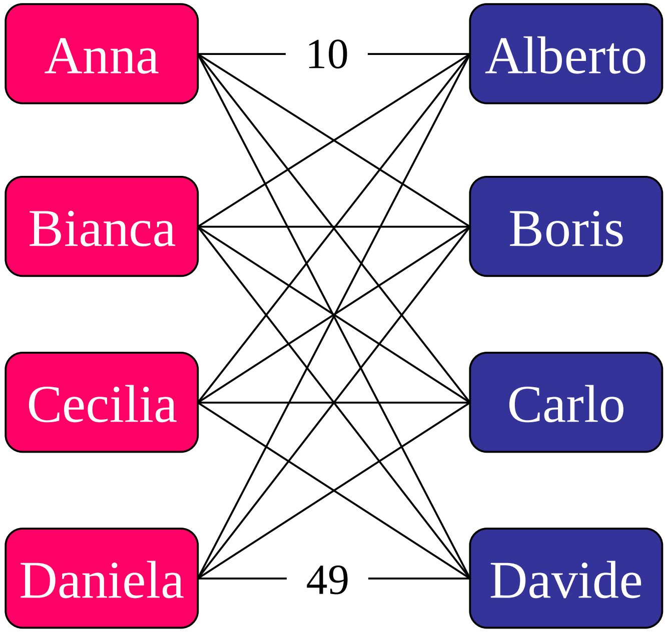
Qual è l'abbinamento "ideale" che massimizza l'attrazione reciproca totale?

Voti dei ragazzi alle ragazze

	Anna	Bianca	Cecilia	Daniela
Alberto	5	2	4	9
Boris	4	3	6	8
Carlo	7	5	2	3
Davide	2	8	2	7

Voti delle ragazze ai ragazzi

	Alberto	Boris	Carlo	Davide
Anna	2	9	2	3
Bianca	0	8	1	5
Cecilia	7	2	3	3
Daniela	1	1	2	7



Formulazione

U = insieme degli archi del grafo G

$\Im$ = famiglia degli insiemi di archi che toccano ogni vertice del grafo G esattamente una volta (matching perfetti)

c = funzione che associa a ogni arco del grafo G un costo pari al prodotto dei punteggi dei vertici corrispondenti

Il problema, della forma

$$\max_{X \in \Im} c(X)$$

consiste nel trovare all'interno di G un matching perfetto di peso massimo.

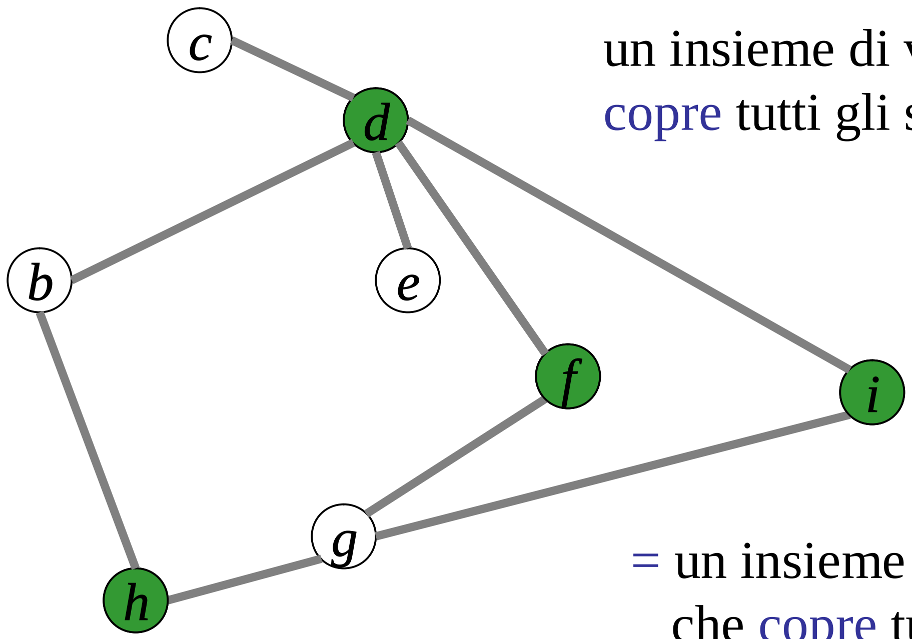
Problema 3 (La rete telematica)

Per monitorare una rete telematica si vuole individuare un insieme di nodi che tocchino tutti i link della rete.

Qual è il più piccolo insieme che verifica questa proprietà?

Formulazione

Si può associare in modo naturale un vertice di un grafo a ogni nodo della rete.
Vertici adiacenti = nodi collegati da un link.



un insieme di vertici che copre tutti gli spigoli

= un insieme di nodi che copre tutti i link

Formulazione

U = insieme degli vertici del grafo G

$\Im$ = famiglia degli insiemi di vertici che toccano ogni arco del grafo G almeno una volta (node-cover, $U \in \Im$)

c = funzione che associa a ogni nodo del grafo G un peso pari a 1

Il problema, della forma

$$\min_{X \in \Im} c(X)$$

consiste nel trovare all'interno di G un node-cover di peso minimo.

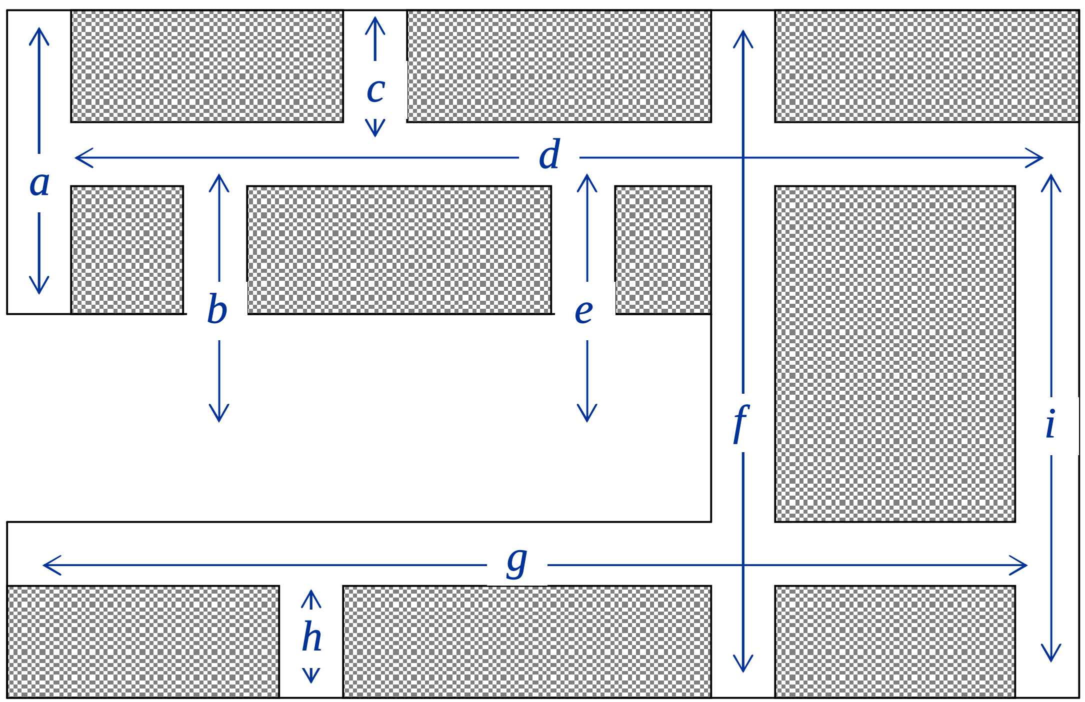
Problema 4 (Il Grande Fratello)

Si vuole dotare un museo di un sistema di televisione a circuito chiuso che consenta la sorveglianza in assenza di personale.

Sapendo che una telecamera posta all'incrocio di due corridoi è in grado, con opportune rotazioni, di sorvegliarli entrambi, qual è il minimo numero di telecamere necessarie?

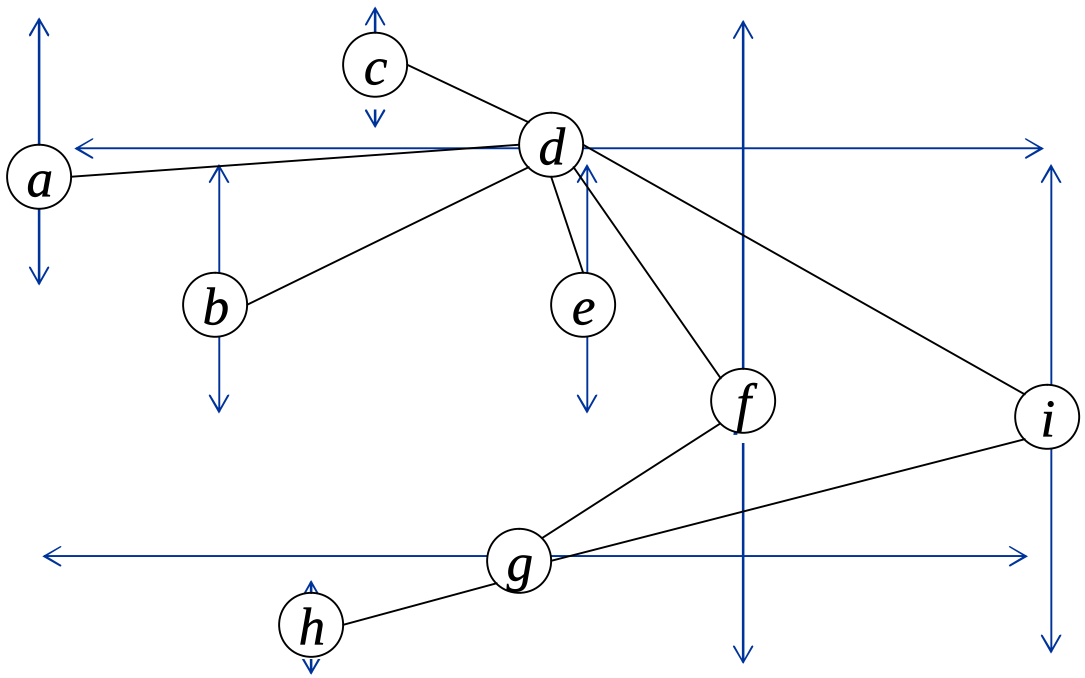
Formulazione

Si può associare ogni corridoio rettilineo a un vertice di un grafo.
Vertici adiacenti = corridoi che si intersecano.



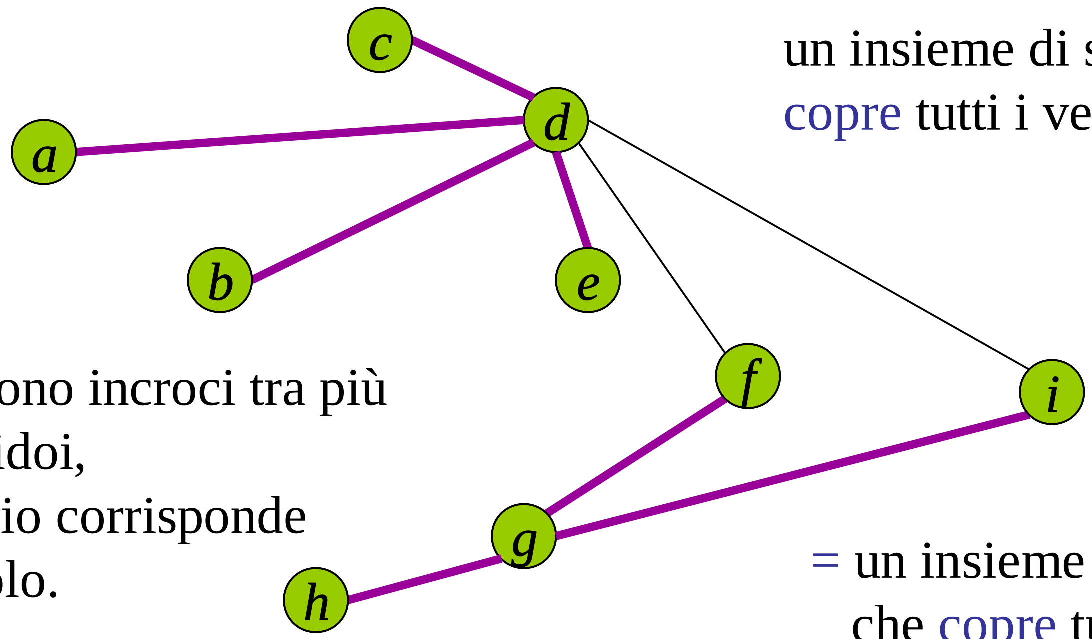
Formulazione

Si può associare ogni corridoio rettilineo a un vertice di un grafo.
Vertici adiacenti = corridoi che si intersecano.



Formulazione

Si può associare ogni corridoio rettilineo a un vertice di un grafo.
Vertici adiacenti = corridoi che si intersecano.



un insieme di spigoli che copre tutti i vertici

Se non vi sono incroci tra più di due corridoi,
ogni incrocio corrisponde a uno spigolo.

= un insieme di telecamere che copre tutti i corridoi

Formulazione

U = insieme degli archi del grafo G

$\Im$ = famiglia degli insiemi di archi che coprono tutti i vertici del grafo G (edge-cover)

c = funzione che associa costo pari a 1 a ogni arco del grafo G

Il problema, della forma

$$\min_{X \in \Im} c(X)$$

consiste nel trovare all'interno di G un edge-cover di peso minimo.

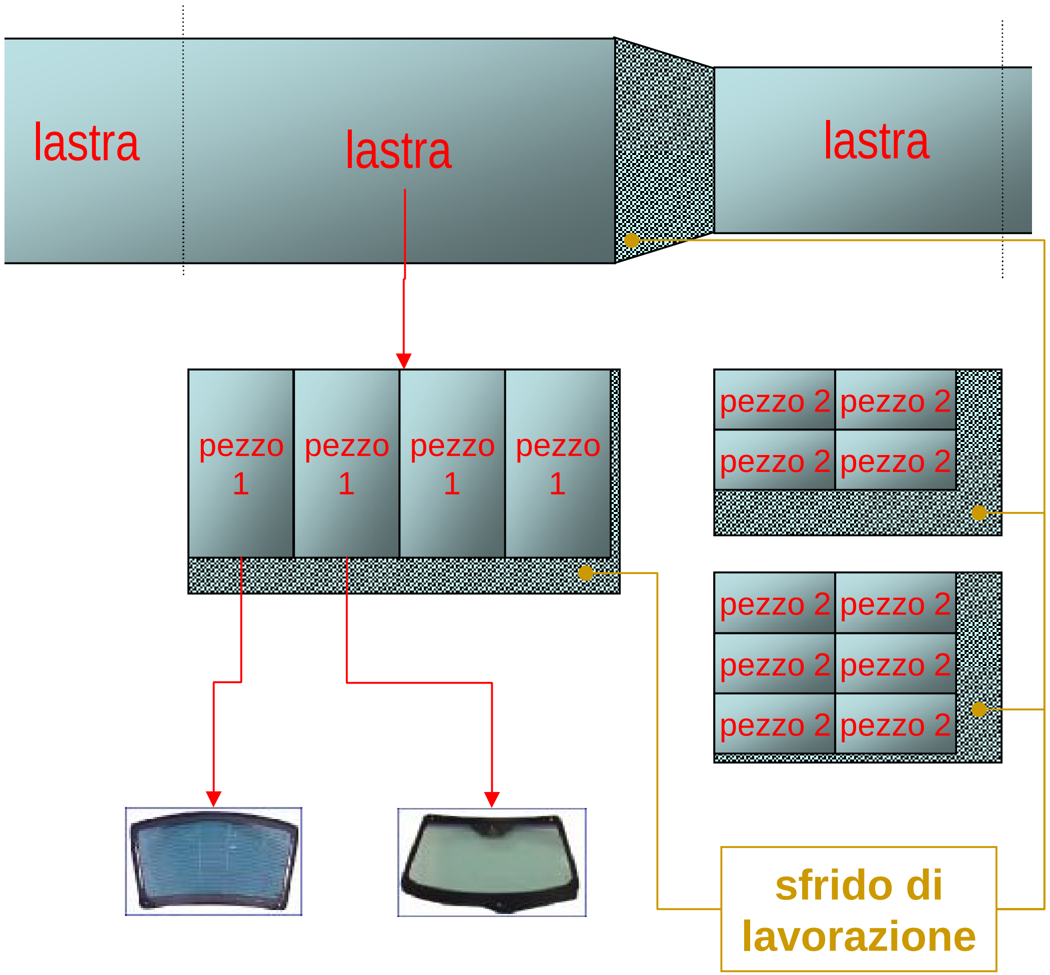
Si osservi che siccome i corridoi orizzontali (verticali) non si intersecano tra di loro, i vertici sono partizionati in due insiemi stabili, e quindi G è bipartito.
In astratto il problema può essere definito su un grafo qualsiasi.

Problema 5 (Produzione del vetro)

forno float

taglio fuori linea (un solo *part size* per lastra)

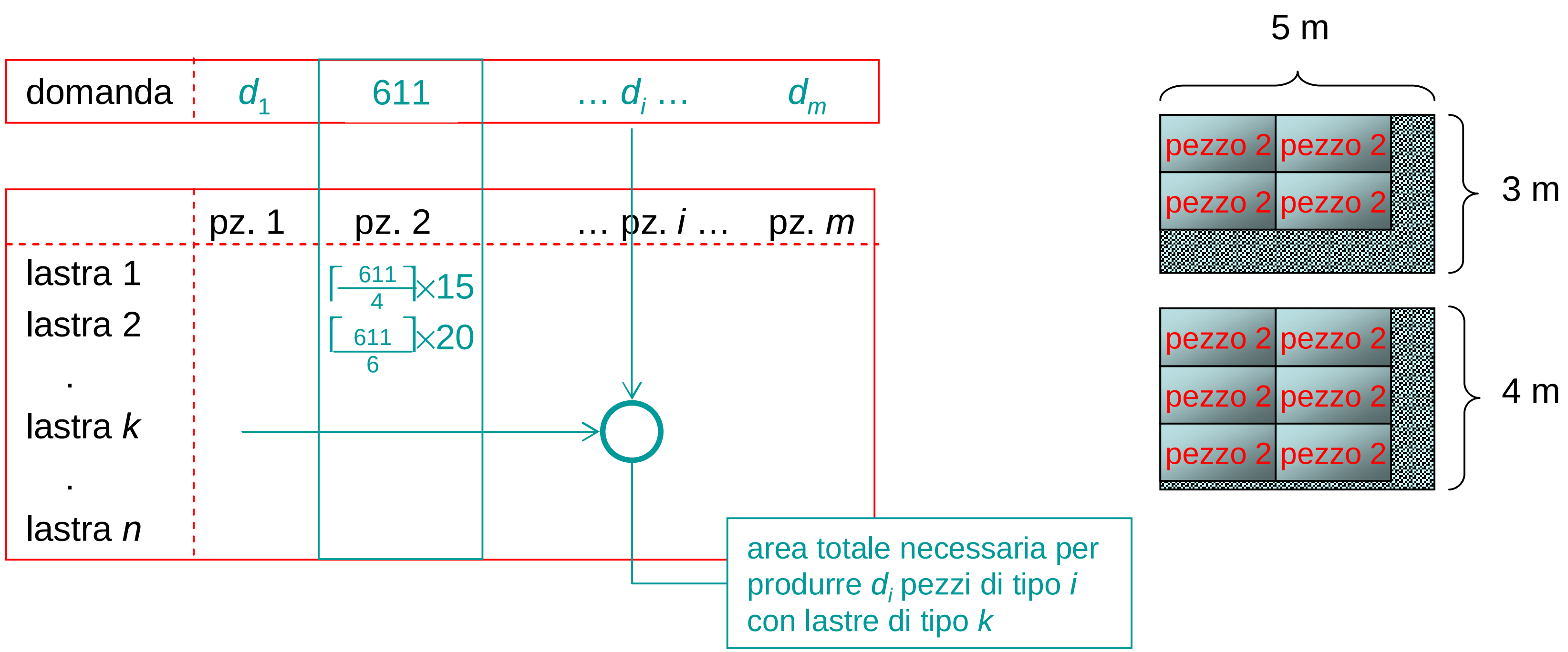
curvatura e finitura



Problema 5 (Produzione del vetro)

Obiettivo: produrre i pezzi nei quantitativi richiesti minimizzando l'area totale delle lastre utilizzate

Ipotesi: per semplicità, tutti i pezzi dello stesso tipo vengono tagliati da lastre di una medesima dimensione



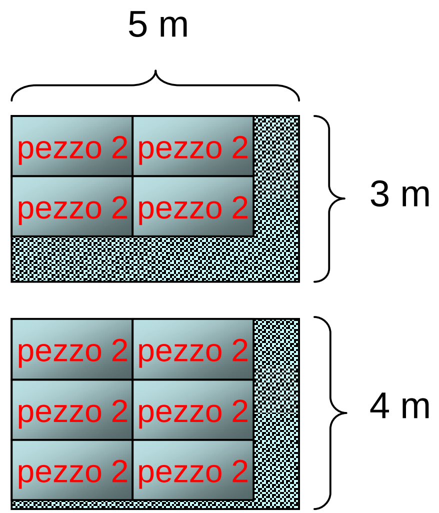
Problema 5 (Produzione del vetro)

Obiettivo: produrre i pezzi nei quantitativi richiesti minimizzando l'area totale delle lastre utilizzate

Ipotesi: per semplicità, tutti i pezzi dello stesso tipo vengono tagliati da lastre di una medesima dimensione

domanda	d_1	611	… d_i …	d_m

	pz. 1	pz. 2	… pz. *i* …	pz. *m*
lastra 1		2295		
lastra 2		2040		
.				
lastra *k*				
.				
lastra *n*				



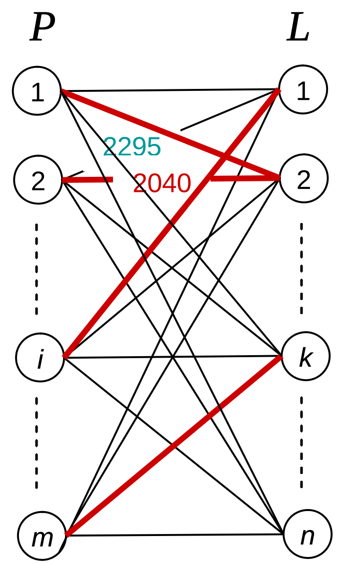
Formulazione

Obiettivo: produrre i pezzi nei quantitativi richiesti minimizzando l'area totale delle lastre utilizzate

Ipotesi: per semplicità, tutti i pezzi dello stesso tipo vengono tagliati da lastre di una medesima dimensione

domanda	d_1	611	… d_i …	d_m

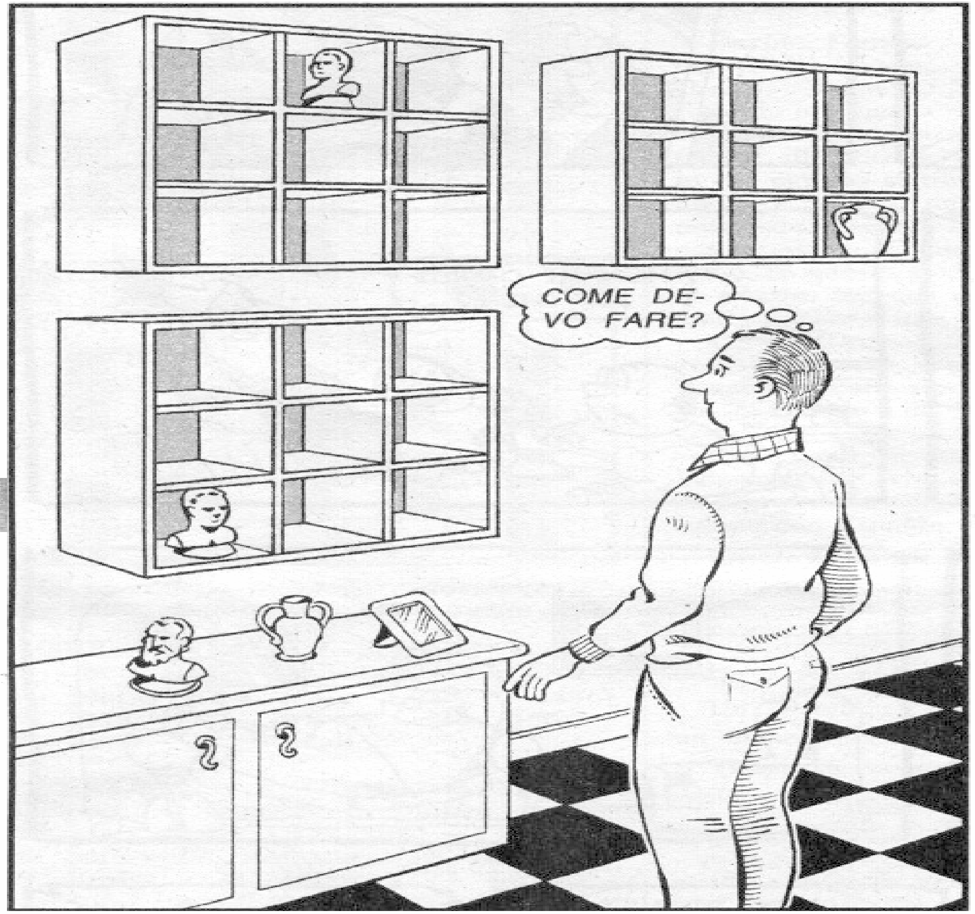
	pz. 1	pz. 2	… pz. *i* …	pz. *m*
lastra 1		2295		
lastra 2		2040		
.				
lastra *k*				
.				
lastra *n*				



Problema: in un grafo bipartito completo $G = (P \cup L, P \times L)$, trovare un assegnamento di P a L avente peso minimo

Problema 6 (Arredamento)

9985. **I SOPRAMMOBILI**

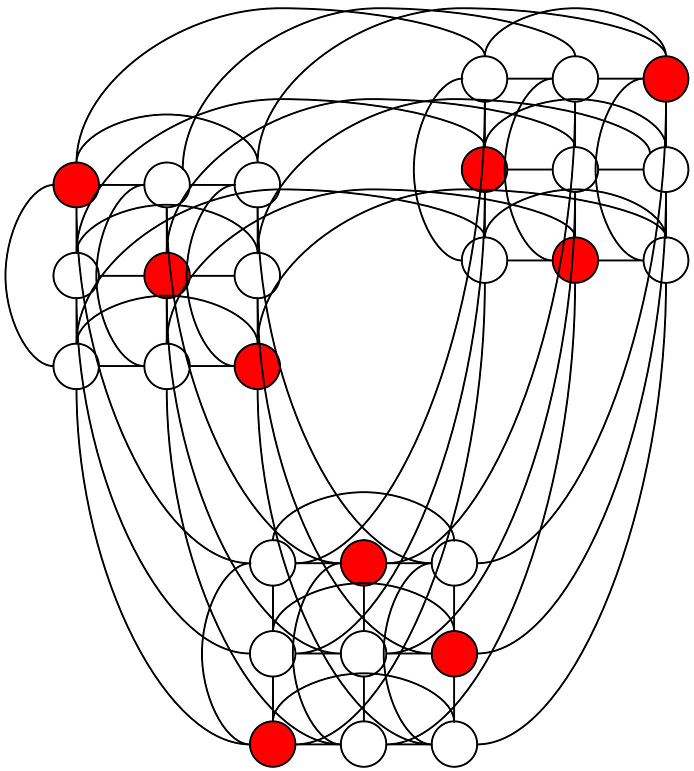


Il signor Rossi ha evidenti problemi nel sistemare i soprammobili nelle tre librerie del suo studio. Egli, infatti, deve inserire in ciascuno dei 27 scomparti: 9 statue, 9 cornici e 9 vasi. In ogni ripiano e in ogni colonna delle tre librerie ci devono essere tutti e tre i diversi oggetti, ma nessun oggetto deve occupare la stessa posizione in due diverse librerie.

Qual è l'unica disposizione possibile, senza spostare i tre oggetti in esse già sistemati? (La soluzione è a pag. 46)

Formulazione

Possiamo associare a ogni scomparto della libreria un nodo di un grafo simmetrico. Due vertici del grafo saranno adiacenti se e solo se gli scomparti ad essi corrispondenti



1) si trovano sulla stessa riga, o
2) si trovano sulla stessa colonna, oppure
3) hanno la medesima posizione

A questo punto diciamo che un nodo di colore rosso corrisponde a una *statua*, uno giallo a un *soprammobile* e uno blu a una *cornice*