Claudio Arbib
Università di L'Aquila

Ricerca Operativa

Teoria della dualità

Sommario

- Sistemi di disequazioni compatibili
- Teoremi dell’alternativa:
  - Il Teorema di Gale
  - Il Lemma di Fàrkas
- Teoria della dualità nella PL
- Teorema forte della dualità
- Il problema duale
  - Dualità debole
  - Reciprocità
- Corollari
  - Condizioni di complementarità
- Regole per la costruzione del problema duale

Sistemi di disequazioni compatibili

- Per il Teorema di Fourier un sistema di disequazioni lineari $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ con

  $$\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^{n}, \quad \mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m \times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathrm{IR}^{m}$$

  è compatibile se e solo se un opportuno sistema $\mathbf{A}'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'$, ottenuto tramite combinazioni coniche delle disequazioni date, con

  $$\mathbf{A}' = [\mathbf{0}, \mathbf{A}^{\circ}] \in \mathrm{IR}^{p \times n}, \mathbf{b}' \in \mathrm{IR}^{p},$$

  è a sua volta compatibile.

Teoremi dell'alternativa

- Iterando il Teorema di Fourier *n* volte, si ha che $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ è compatibile se e solo se esistono opportune combinazioni coniche delle sue disequazioni che diano luogo a un sistema $\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^{(n)}$ compatibile, dove

$$\mathbf{A}^{(n)} = [\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}] \in \mathrm{IR}^{q \times n}, \quad \mathbf{b}^{(n)} \in \mathrm{IR}^{q}$$

- Ma $[\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}]\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^{(n)}$ è compatibile se e solo se $\mathbf{b}^{(n)} \geq \mathbf{0}$.

- Quindi perché $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ sia incompatibile deve essere possibile combinare con un vettore $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$
  - le righe di $\mathbf{A}$ in modo da ottenere la riga $\mathbf{0}$
  - le componenti di $\mathbf{b}$ in modo da ottenere un numero $b_i^{(n)} < 0$

Il Teorema di Gale

Quanto detto si sintetizza nel seguente

Teorema (Gale): Il sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ è compatibile se e solo se il sistema $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{yA} = \mathbf{0}$, $\mathbf{yb} < 0$ è incompatibile.

- Il Teorema di Gale è detto primo teorema della alternativa, in quanto esprime la compatibilità di un sistema in termini dell'incompatibilità di un altro sistema.
- Il sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ viene detto sistema primale, il sistema $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{yA} = \mathbf{0}$, $\mathbf{yb} < 0$ viene detto sistema duale.
- Per un sistema nella forma $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$, il sistema duale assume la forma $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{yA} = \mathbf{0}$, $\mathbf{yb} > 0$.

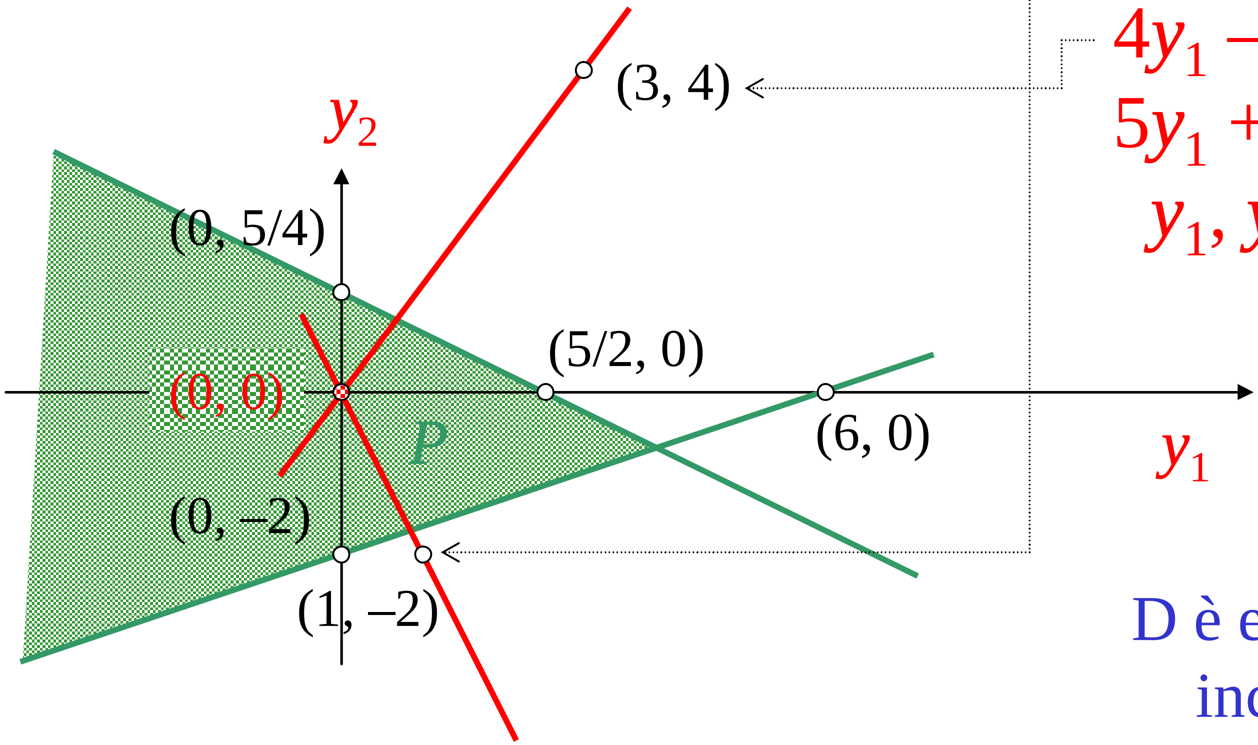
Esempio

Sistema primale P)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 5 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

Sistema duale D)

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &= 0 \\ 4y_1 - 3y_2 &= 0 \\ 5y_1 + 6y_2 &< 0 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



D è evidentemente incompatibile

Il Lemma di Fàrkas

Il Teorema di Gale non è l'unico teorema dell'alternativa:

Teorema (Fàrkas): Il sistema (primale standard) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ è compatibile se e solo se il sistema

$$\mathbf{yA} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{yb} < 0$$

(o, equivalentemente, il sistema $\mathbf{yA} \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{yb} > 0$) è incompatibile.

Dim.: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, $-\mathbf{Ax} \leq -\mathbf{b}$, $-\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ compatibile sse (Gale):

$$\mathbf{z}\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} < 0.$$

Posto $\mathbf{z} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, scrivere $\mathbf{uA} - \mathbf{vA} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ con $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ significa $(\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Ponendo $\mathbf{y} = (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ si ottiene la tesi.
(Si noti che $\mathbf{y}$ non è vincolato in segno).

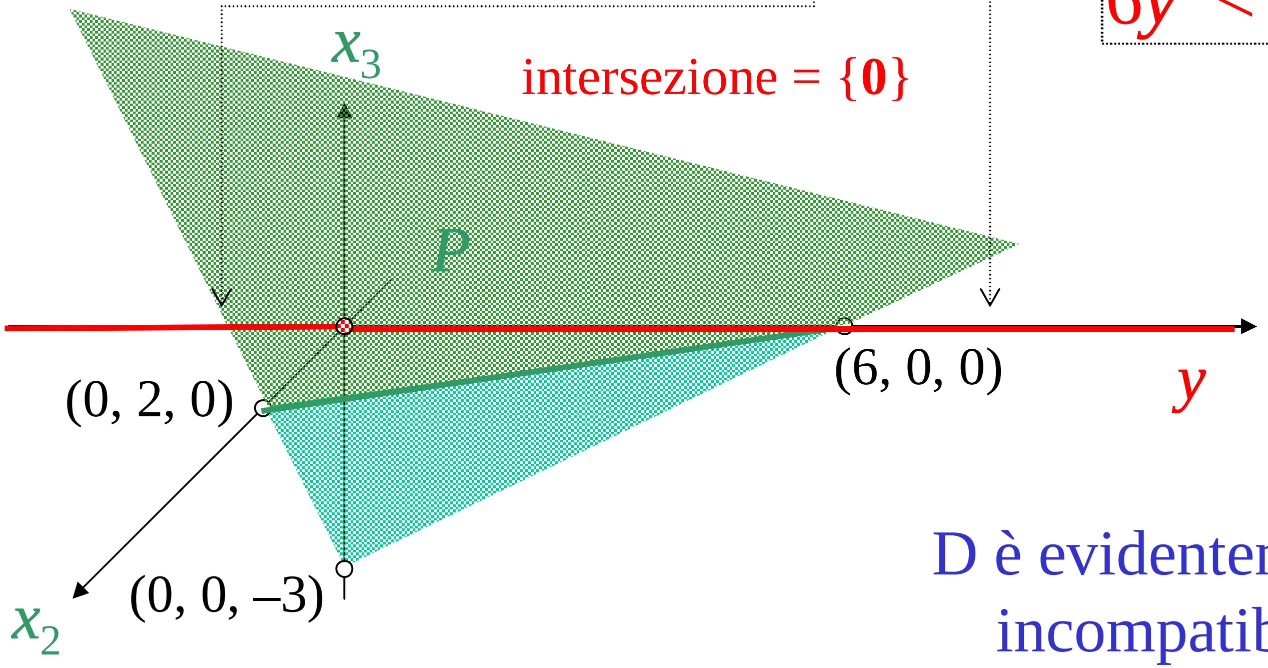
Esempio

Sistema primale P) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ \geq\ 0$$

Sistema duale D) $\boxed{y \leq 0},\ \boxed{y \geq 0,\ 3y \geq 0}$

$$\boxed{6y \ <\ 0}$$



D è evidentemente incompatibile

Commento

- I teoremi dell'alternativa forniscono un importante strumento per la soluzione del problema di decidere se un poliedro è o non è vuoto
- Essi permettono di trasformare un problema quantificato universalmente ($\forall$) in uno quantificato esistenzialmente ($\exists$).

  Infatti un poliedro $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ è vuoto se per ogni $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n$ esiste una riga i per cui $\mathbf{a}_i\mathbf{x} > b_i$.

  I teoremi dell'alternativa consentono di eludere la necessità di una verifica per ogni $\mathbf{x}$ determinando in un altro poliedro (duale di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$) l'esistenza di un $\mathbf{y}$ che verifichi $\mathbf{yb} < 0$.
- La possibilità o impossibilità di questa operazione spesso determina la differenza tra un problema "facile" e uno "difficile". Su di essa si basa la stessa definizione della classe NP.

Teoria della dualità nella PL

- Consideriamo un problema di PL in forma standard:

$$
\text{P)} \qquad \min \quad \mathbf{cx} \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
$$

Teorema (dualità forte): Una soluzione ammissibile $\mathbf{x}^*$ del problema P è ottima se e solo se esiste una $\mathbf{y}^*$ appartenente a

$$D = \{\mathbf{y} \in \mathrm{IR}^m : \mathbf{yA} \leq \mathbf{c}\}$$

per la quale si abbia $\mathbf{y^*b} \geq \mathbf{cx^*}$.

Esempio

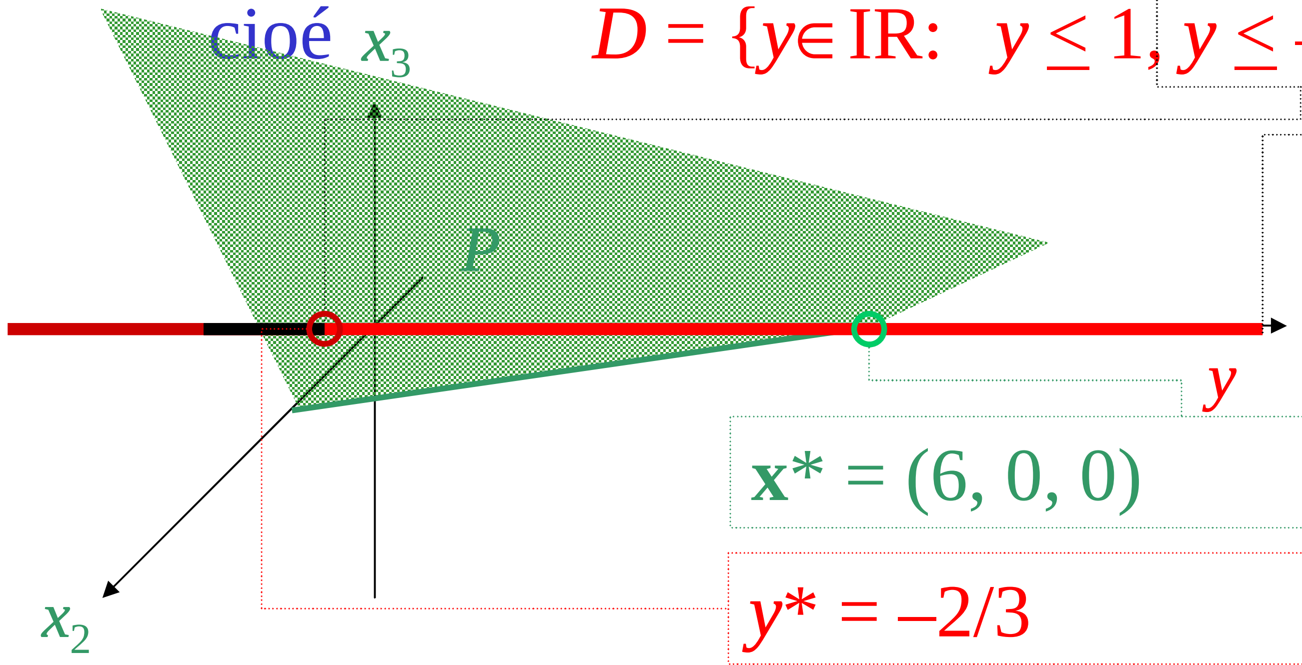
Problema P) min $x_1 - 2x_2 + 4x_3$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$D = \{y \in \mathrm{IR}: \; y \leq 1, \; 3y \leq -2 \,, \; -2y \leq 4\}$

cioé $D = \{y \in \mathrm{IR}: \; y \leq 1, \; \boxed{y \leq -2/3} \,, \; \boxed{y \geq -2}\}$



$\mathbf{x}^*$ non ottima

$\mathbf{x}^* = (6, 0, 0)$ $\quad$ $\mathbf{cx}^* = +6$

$\vee$

$y^* = -2/3$ $\quad$ $y^*b = -4$

Esempio

Problema P) $\min \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3$

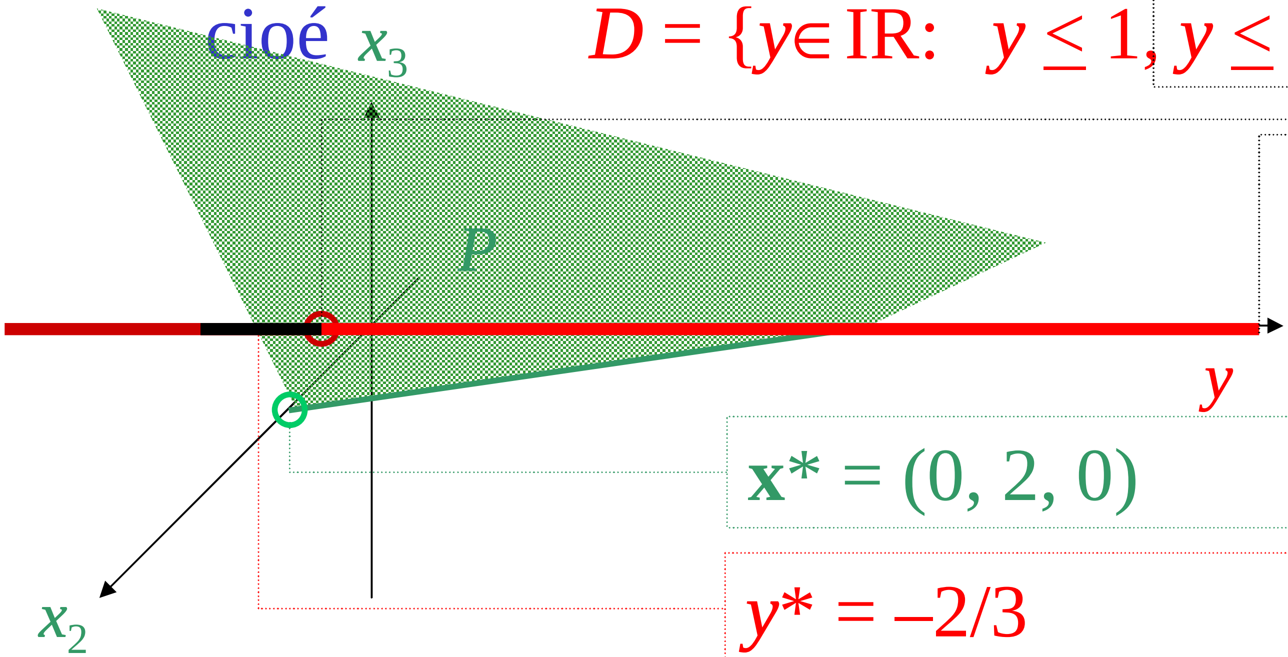
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$D = \{y \in \mathrm{IR}: \; y \leq 1, \; 3y \leq -2, \; -2y \leq 4\}$$

cioé

$$D = \{y \in \mathrm{IR}: \; y \leq 1, \; \boxed{y \leq -2/3}, \; \boxed{y \geq -2}\}$$



x* ottima

$\mathbf{x}^* = (0, 2, 0) \qquad \mathbf{cx}^* = -4$

$y^* = -2/3 \qquad y^*b = -4$

Dualità forte

Dimostrazione:

Sia data $\mathbf{x}^*$ ammissibile per il problema P e supponiamo $\mathbf{y}^*\mathbf{b} \geq \mathbf{c}\mathbf{x}^*$ per qualche $\mathbf{y}^* \in D$.

Quindi il sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{yA} &\leq \mathbf{c} \\ -\mathbf{yb} &\leq -\mathbf{cx}^* \end{aligned} \qquad \text{ovvero} \quad \mathbf{y}[\mathbf{A}, -\mathbf{b}] \leq [\mathbf{c}, -\mathbf{cx}^*]$$

risulta compatibile.

Applicando a tale sistema il Teorema di Gale si ha che il sistema

$$[\mathbf{A}, -\mathbf{b}]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \lambda\end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \lambda\end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad [\mathbf{c}, -\mathbf{cx}^*]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \lambda\end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

è necessariamente incompatibile.

Dualità forte

Segue dimostrazione:

In altri termini nessuna $\mathbf{x}$, $\lambda \geq \mathbf{0}$ soddisfa

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{b}, \quad \mathbf{cx} < \lambda\mathbf{cx}^*$$

ciò in particolare vale per $\lambda = 1$, dal che si deduce che non esiste $\mathbf{x}$ ammissibile per P per cui

$$\mathbf{cx} < \mathbf{cx}^*$$

Quindi $\mathbf{x}^*$ è ottima per P.

Dualità forte

Segue dimostrazione:

Viceversa, se il sistema duale $\mathbf{y}[\mathbf{A}, -\mathbf{b}] \leq [\mathbf{c}, -\mathbf{cx}^*]$ è incompatibile, allora il primale $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{b}$, $\mathbf{cx} < \lambda\mathbf{cx}^*$ ammette una soluzione $\mathbf{x}°, \lambda° \geq 0$.

- Se $\lambda° > 0$, $\mathbf{x}°/\lambda°$ è P-ammissibile e migliore di $\mathbf{x}^*$.
- Se $\lambda° = 0$, si ha $\mathbf{Ax}° = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}° \geq 0$ e $\mathbf{cx}° < 0$, quindi $\mathbf{x}^* + \mathbf{x}°$ è P-ammissibile e migliore di $\mathbf{x}^*$.

Quindi $\mathbf{x}^*$ non è ottima.

Fine dimostrazione

Il problema duale

- Il teorema precedente giustifica l'introduzione del problema

$$\text{D)} \qquad \max \quad \mathbf{yb}$$
$$\mathbf{yA} \leq \mathbf{c}$$

- Tale problema è detto duale del problema P.
  A sua volta, P viene detto problema primale.
- Il duale di un problema di PL (in forma standard) è un problema di PL (in forma generale).
- Il problema duale ha
  - una variabile per ogni vincolo del primale,
  - un vincolo per ogni variabile del primale.

Proprietà del duale

Teorema (reciprocità): Il problema P è il duale del problema D.

Teorema (dualità debole o dominanza): Per ogni coppia di soluzioni $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{y} \in D$ si ha $\mathbf{yb} \leq \mathbf{cx}$.

Dimostrazione: La reciprocità si ottiene riscrivendo D in forma standard mediante l'aggiunta di slack non negative, e scrivendo quindi il duale del problema ottenuto.

Per la dominanza basta combinare le colonne di $\mathbf{yA} \leq \mathbf{c}$ (vincoli di D) con le componenti di $\mathbf{x}$. Poiché la combinazione è conica, la diseguaglianza si conserva:

$$\mathbf{yAx} \leq \mathbf{cx}$$

La tesi si ha applicando la proprietà associativa ($\mathbf{y}(\mathbf{Ax}) \leq \mathbf{cx}$) e osservando che $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Alcuni corollari

Corollario 1: $\mathbf{x}^* \in P$ e $\mathbf{y}^* \in D$ sono ottime se e solo se

$$\mathbf{y}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$$

Dim.: si ottiene combinando dualità debole e dualità forte.

Corollario 2 (ortogonalità o complementarità): $\mathbf{x}^* \in P$ e $\mathbf{y}^* \in D$ sono ottime se e solo se

$$(\mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\cdot\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\cdot(\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) = 0$$

Dim.: il corollario dice che all'ottimo le slack duali (primali) sono ortogonali alla soluzione primale (duale).

La prima condizione si riscrive $\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^*$, e poiché $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ essa coincide con il corollario precedente.

La seconda è verificata $\forall \mathbf{y}^*$, in quanto $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

Esempio (Corollario 2)

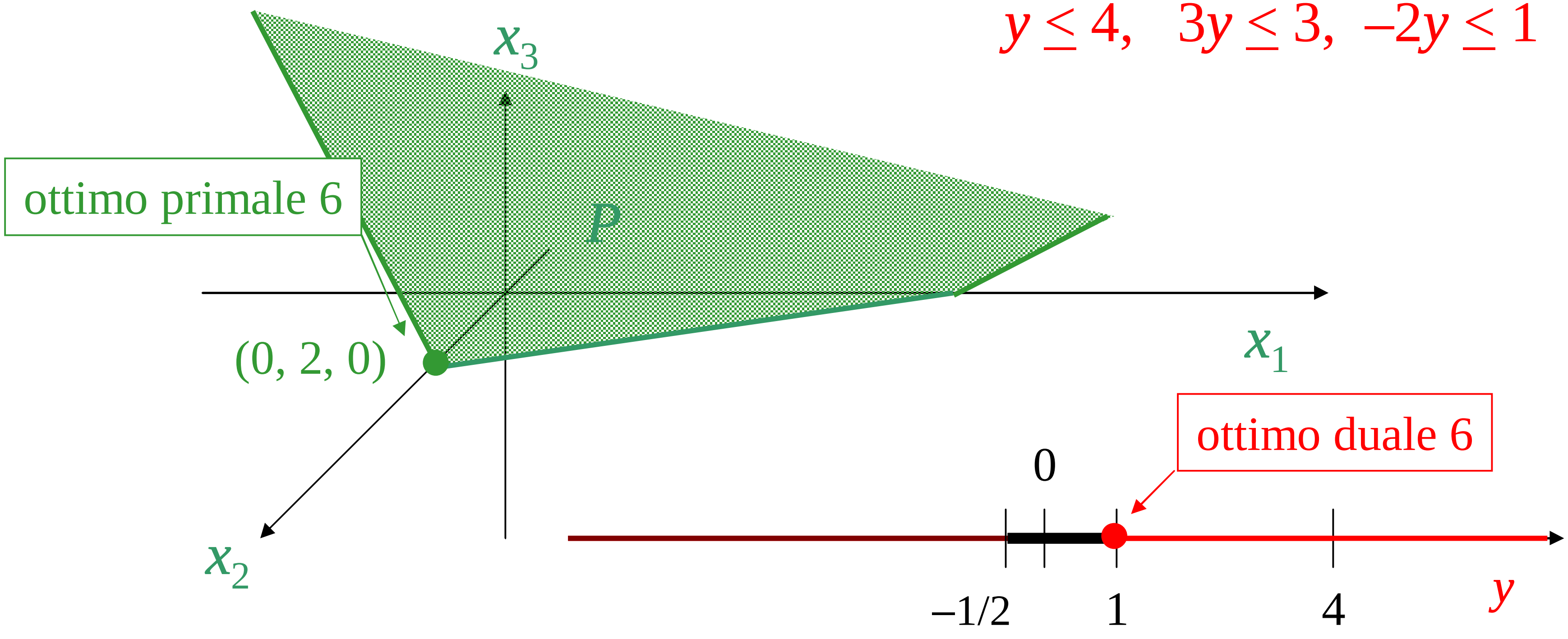
Problema primale P) min $4x_1 + 3x_2 + x_3$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema duale D) max $6y$

$$y \leq 4, \quad 3y \leq 3, \quad -2y \leq 1$$



Alcuni corollari

Corollario 3: Se il problema P (il problema D) è illimitato inferiormente (superiormente) allora il problema D (il problema P) non ammette soluzione.

Dim.: E' conseguenza diretta del teorema di dualità debole.

Ad esempio, supponiamo per assurdo che P sia illimitato inferiormente (cioè che comunque si fissi $\mathbf{x} \in P$ esista un $\mathbf{x}° \in P$ tale che $\mathbf{cx}° < \mathbf{cx}$) e che tuttavia D non sia vuoto (cioè che esista un $\mathbf{y}° \in D$).

Ciò contraddice evidentemente la dualità debole, secondo la quale si ha $\mathbf{y}°\mathbf{b} \leq \mathbf{cx}$, $\forall \mathbf{x} \in P$, e quindi non può aversi $\mathbf{cx} \to -\infty$.

(Con ragionamento analogo si opera se D è illimitato).

Esempio (Corollario 3)

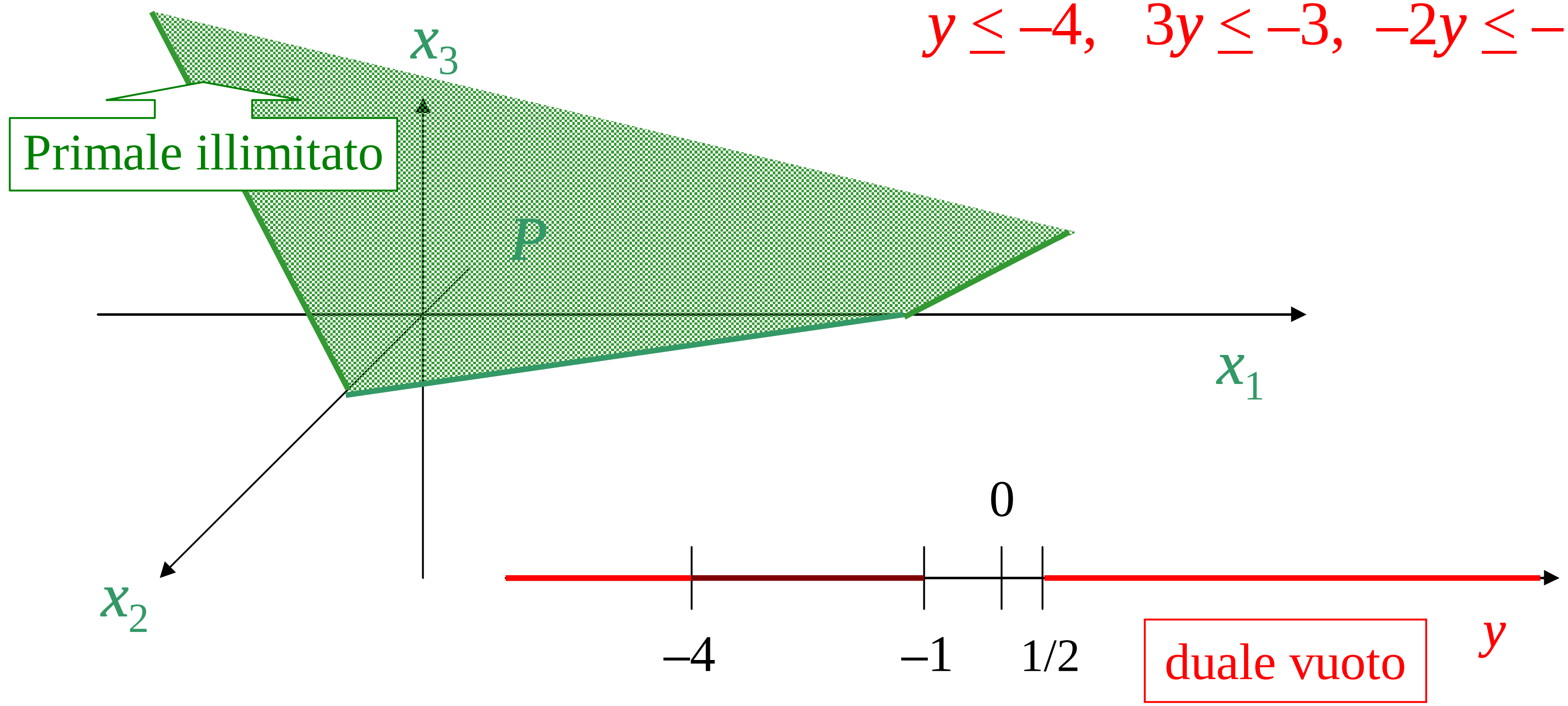
Problema primale P) min $-4x_1 - 3x_2 - x_3$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema duale D) max $6y$

$$y \leq -4, \quad 3y \leq -3, \quad -2y \leq -1$$



Riassumendo

	P illimitato	$P = \emptyset$	P ammette ottimo finito
D illimitato	**impossibile**	✓	**impossibile**
$D = \emptyset$	✓	**?**	**impossibile**
D ammette ottimo finito	**impossibile**	**impossibile**	✓

Regole per la costruzione del duale

Regola 1: Scrivere il primale in forma di min con vincoli di $\geq$ e/o di =. Il duale sarà allora in forma di max con vincoli di = e/o di $\leq$.

Regola 2: Generare una variabile duale y_i per ogni vincolo primale: y_i sarà

- ≥ 0 se il vincolo primale è di $\geq$ (vincolo lasco)
- non vincolata in segno se il vincolo primale è di = (vincolo stretto)

Regola 3: La funzione obiettivo duale si ottiene combinando le y_i con il termine noto primale **b**. Il termine noto duale coincide con il vettore di costo primale **c**.

Regola 4: Generare un vincolo duale per ogni variabile primale x_j: il vincolo sarà

- di $\leq$ (vincolo lasco) se x_j è ≥ 0
- di = (vincolo stretto) se x_j è non vincolata in segno

Esempio 1

Problema primale P) max $5x_1 - x_2 + 2x_3$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 6x_3 &\le 6 \\ 2x_1 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 5 \\ x_2,\ x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Trasformazione (Regola 1) P) min $-5x_1 + x_2 - 2x_3$

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 6x_3 &\ge -6 \\ 2x_1 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 5 \\ x_2,\ x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Problema duale D) max $-6y_1 + 4y_2 + 5y_3$

$$\begin{aligned} y_1, y_3 &\ge 0 \\ -y_1 + 2y_2 + 2y_3 &= -5 \\ -4y_1 + 3y_3 &\le 1 \\ 6y_1 - y_2 &\le -2 \end{aligned}$$

Esempio 2

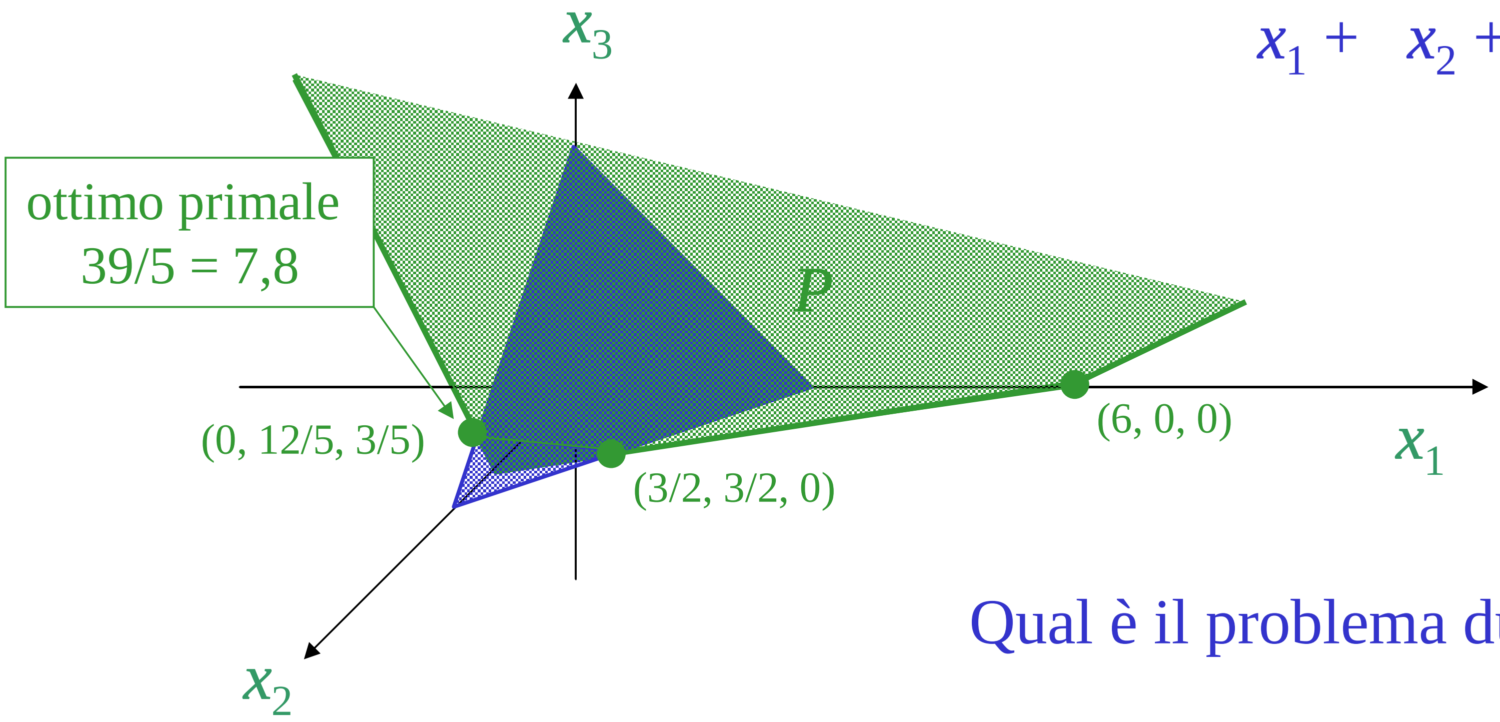
Problema primale

P) min $4x_1 + 3x_2 + x_3$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$$



Qual è il problema duale?

Esempio 3

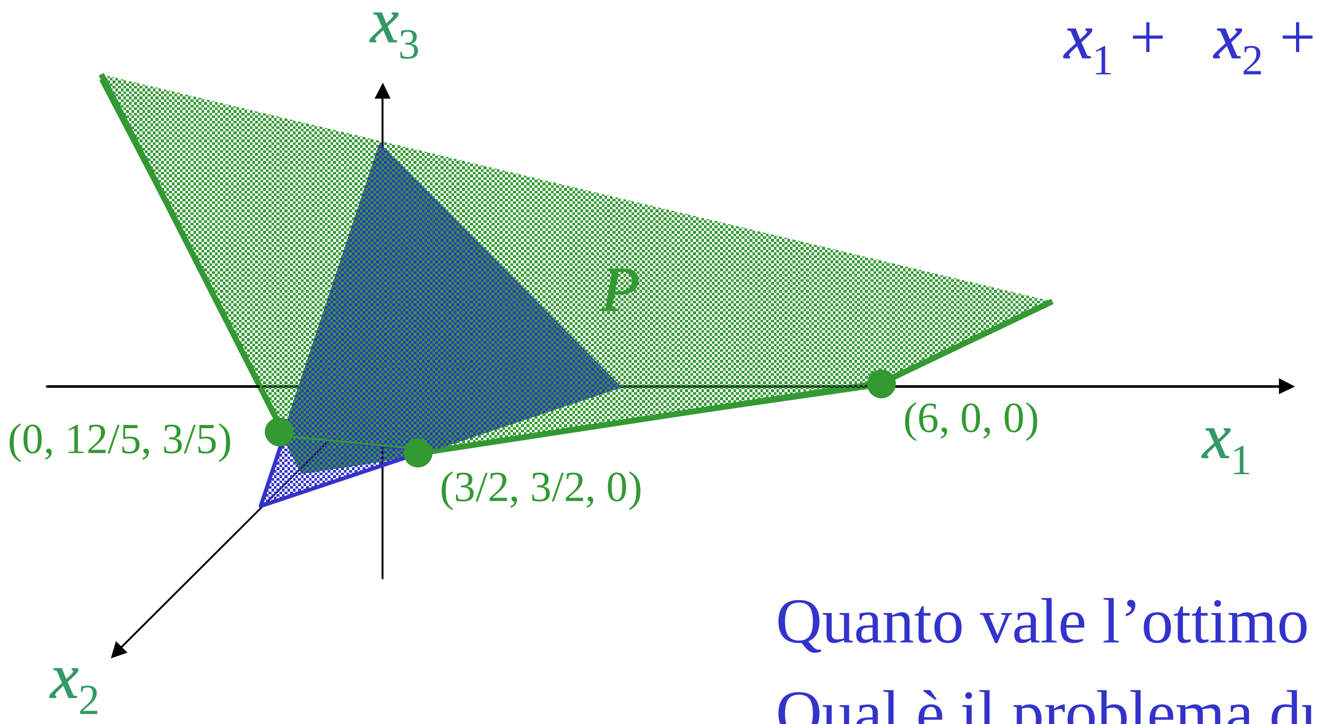
Problema primale

P) max $4x_1 + 3x_2 + x_3$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$$



Quanto vale l'ottimo primale?

Qual è il problema duale?