Claudio Arbib
Università di L’Aquila

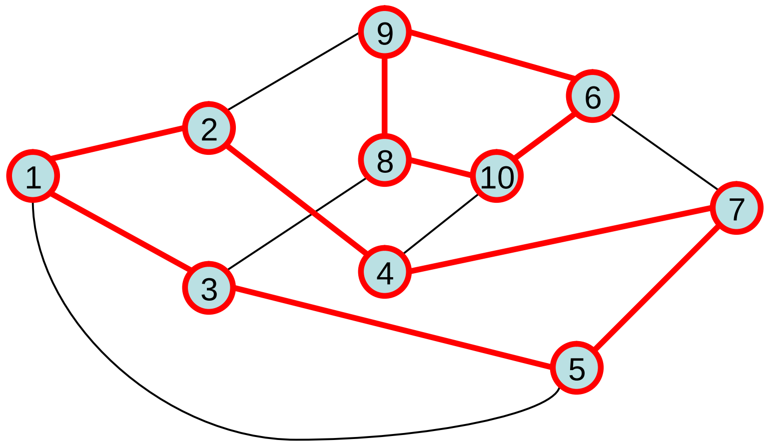
Ricerca Operativa

Esercizi di ottimizzazione combinatoria

2005-2006

Grafi

Esercizio 1. Un grafo simmetrico $G = (V, E)$ si dice *cubico* se tutti i suoi vertici hanno grado 3.



Sia C un insieme di archi di G

- che sia partizionabile in cicli
- che copre tutti i vertici.

L'insieme $E - C$ è sempre

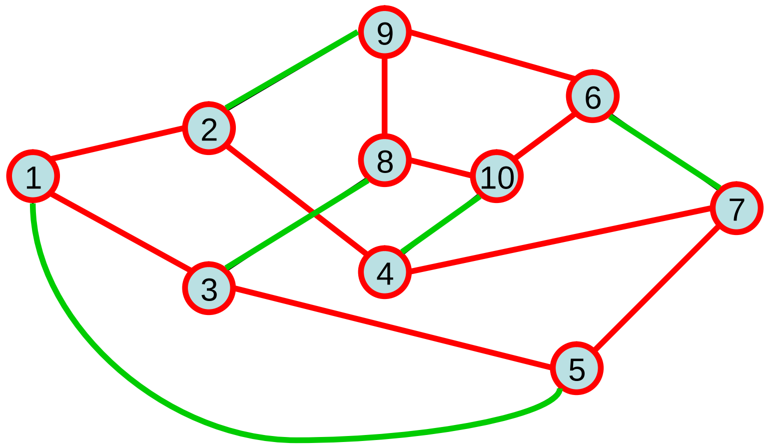
[A] un matching perfetto

[B] un albero ricoprente

[C] una foresta ricoprente

Grafi

Esercizio 1. Un grafo simmetrico $G = (V, E)$ si dice *cubico* se tutti i suoi vertici hanno grado 3.



Sia C un insieme di archi di G

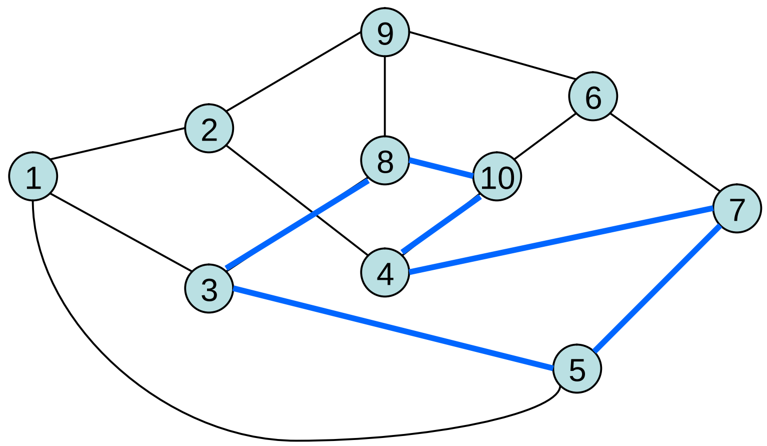
- che sia partizionabile in cicli
- che copre tutti i vertici.

L'insieme $E - C$ è sempre [A] un matching perfetto

Siccome G è cubico e il sottografo (V, C) ha tutti i nodi di grado 2, quelli del sottografo $M = (V, E - C)$ hanno tutti grado 1.
Poiché M è ricoprente, l'insieme dei suoi archi forma un matching perfetto.
(Ogni matching perfetto è una foresta ricoprente: quindi anche la [C] è corretta)

Grafi

Esercizio 2. Un grafo simmetrico $G = (V, E)$ si dice *cubico* se tutti i suoi vertici hanno grado 3.



Sia C un insieme di archi di G

- che sia partizionabile in cicli
- che sia massimale.

Il sottografo $(V(C), E - C)$ è sempre

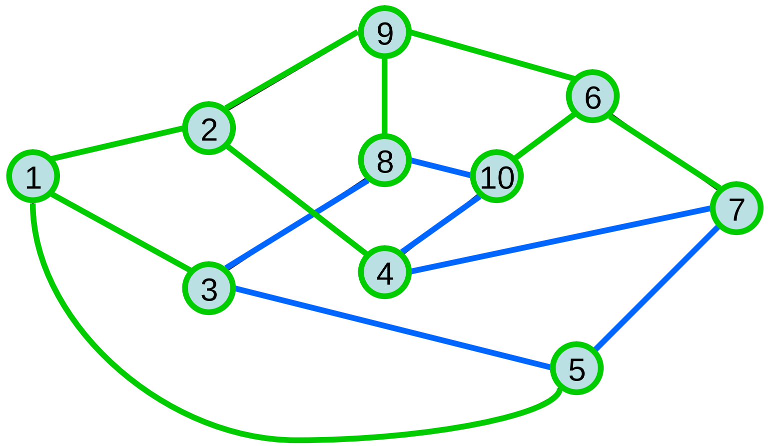
[A] un matching perfetto

[B] un albero ricoprente

[C] una foresta ricoprente

Grafi

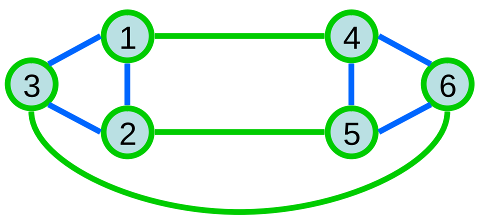
Esercizio 2. Un grafo simmetrico $G = (V, E)$ si dice *cubico* se tutti i suoi vertici hanno grado 3.



($V(C)$, C) non è necessariamente ricoprente, ma i suoi nodi hanno tutti grado 2. Quindi ogni nodo del sottografo (V, $E - C$) ha grado 1 oppure 3, a seconda che sia toccato o no da archi di C.

Inoltre C è massimale, vale a dire che aggiungendo archi a C non è possibile ottenere ulteriori cicli.

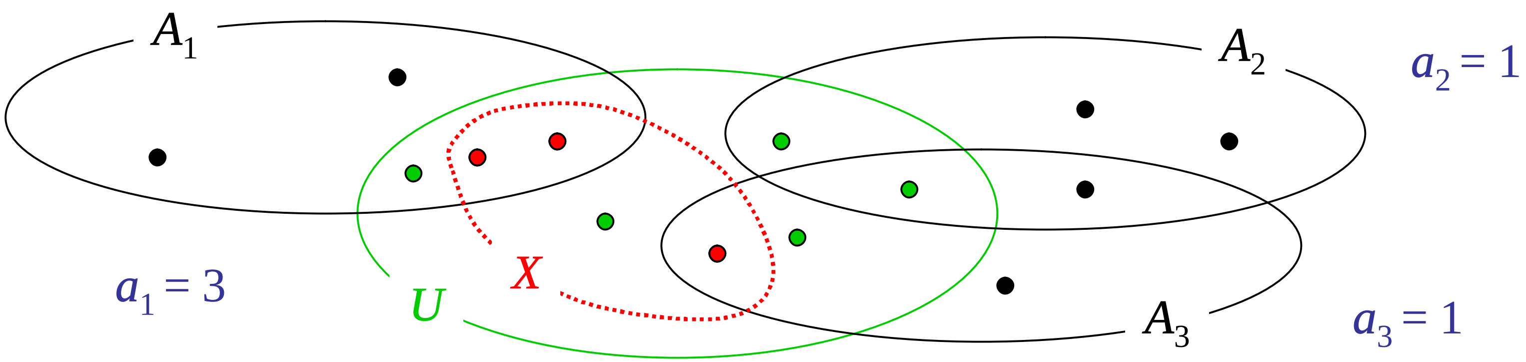
Quindi $E - C$ non contiene cicli, ed è dunque una foresta ricoprente (non necessariamente un albero).



Matroidi

Esercizio 1. Siano U, $A_1, \ldots, A_n$ insiemi finiti, e $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{IR}^+$.
Si definisca $\Im$ come la classe di tutti i sottoinsiemi X di U tali che

$$|X \cap A_k| \leq a_k$$

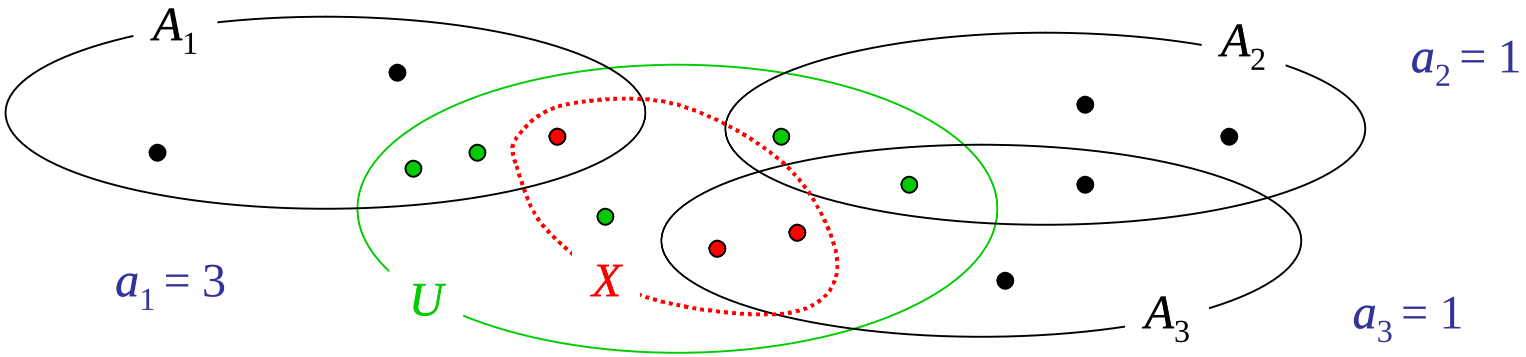


$$\left.\begin{array}{l} |X \cap A_1| = 2 \leq a_1 \\ |X \cap A_2| = 0 \leq a_2 \\ |X \cap A_3| = 1 \leq a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow X \in \Im$$

Matroidi

Esercizio 1. Siano U, A_1, …, A_n insiemi finiti, e a_1, …, $a_n \in$ IR$^+$.
Si definisca $\mathfrak{I}$ come la classe di tutti i sottoinsiemi X di U tali che

$$|X \cap A_k| \le a_k$$

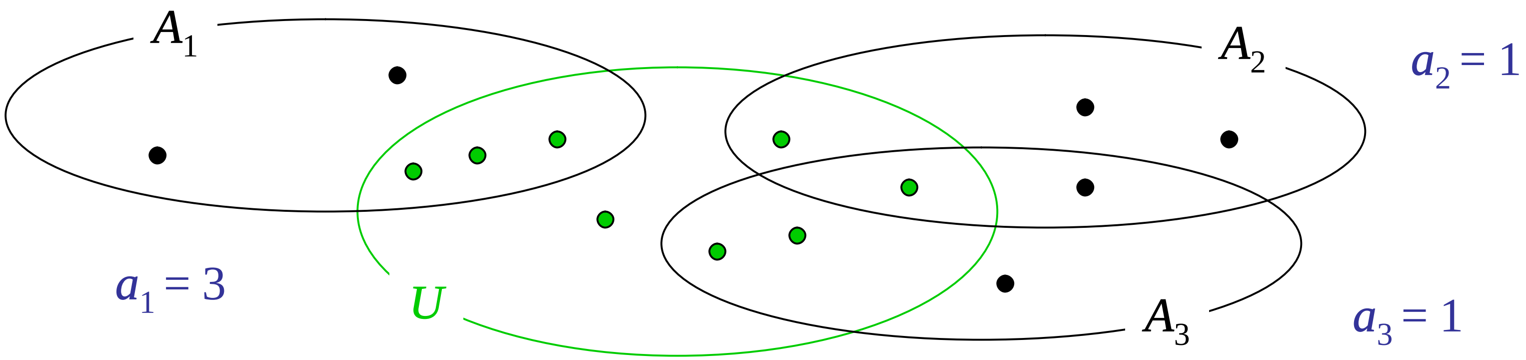


$$\left.\begin{array}{l} |X \cap A_1| = 1 \le a_1 \\ |X \cap A_2| = 0 \le a_2 \\ |X \cap A_3| = 2 > a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow X \notin \mathfrak{I}$$

Matroidi

Esercizio 1. Siano $U, A_1, \ldots, A_n$ insiemi finiti, e $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{IR}^+$.
Si definisca $\mathfrak{I}$ come la classe di tutti i sottoinsiemi X di U tali che

$$|X \cap A_k| \leq a_k$$



La coppia $(U, \mathfrak{I})$

[A] non è subclusiva

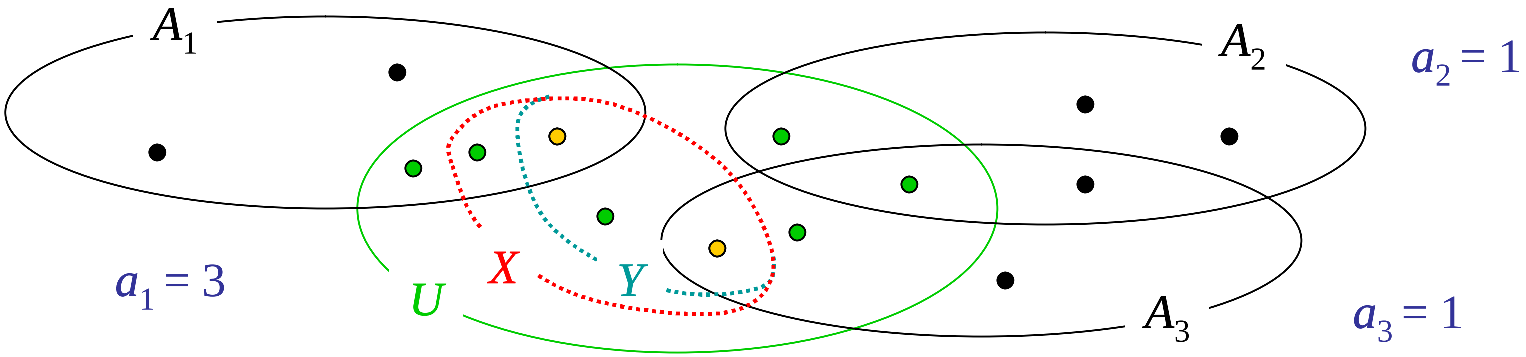
[B] costituisce un matroide

[C] è subclusiva ma non costituisce un matroide

Matroidi

Esercizio 1. Siano U, A_1, …, A_n insiemi finiti, e a_1, …, $a_n \in$ IR$^+$.
Si definisca $\Im$ come la classe di tutti i sottoinsiemi X di U tali che

$$|X \cap A_k| \leq a_k$$



La coppia $(U, \Im)$

$\Im$ subclusiva significa

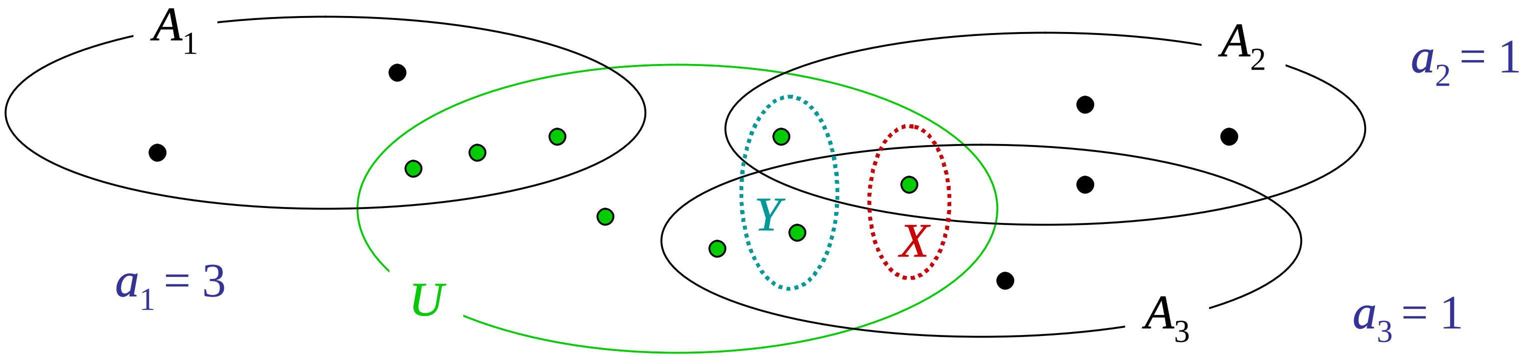
$$X \in \Im,\ Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \Im$$

$$\left.\begin{aligned} |Y \cap A_1| &= 1 \leq a_1 \\ |Y \cap A_2| &= 0 \leq a_2 \\ |Y \cap A_3| &= 1 \leq a_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y \in \Im$$

Matroidi

Esercizio 1. Siano U, $A_1, \ldots, A_n$ insiemi finiti, e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Si definisca $\mathfrak{I}$ come la classe di tutti i sottoinsiemi X di U tali che

$$|X \cap A_k| \leq a_k$$



La coppia $(U, \mathfrak{I})$

Non soddisfa la proprietà di scambio:

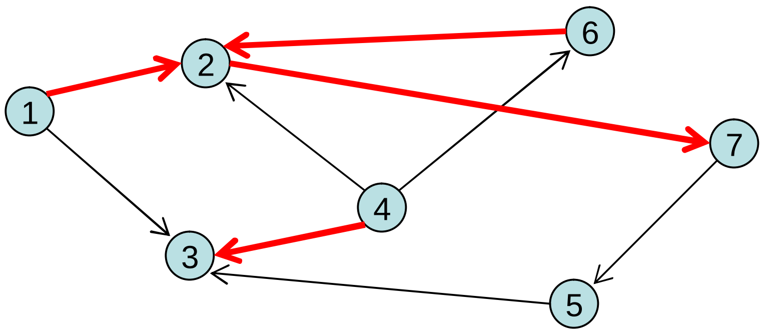
Esistono infatti $X, Y \in \mathfrak{I}$ con $|X| < |Y|$ tali che per nessun $y \in Y - X$ si ha $X \cup \{y\} \in \mathfrak{I}$

Matroidi

Esercizio 2. Dato un grafo asimmetrico $G = (V, E)$, si consideri la famiglia $\mathfrak{I}$ costituita da tutti gli insiemi di archi A per i quali ogni $u \in V$ è termine di al più un arco in A.

$\{12, 34, 37\} \in \mathfrak{I}$

$\{12, 34, 37, 62\} \notin \mathfrak{I}$



La coppia $(E, \mathfrak{I})$

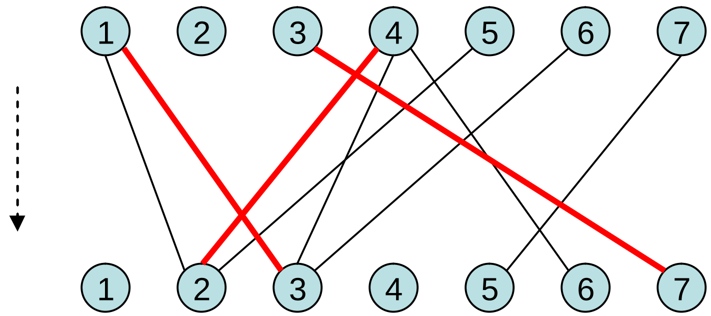
[A] è subclusiva ma non costituisce un matroide

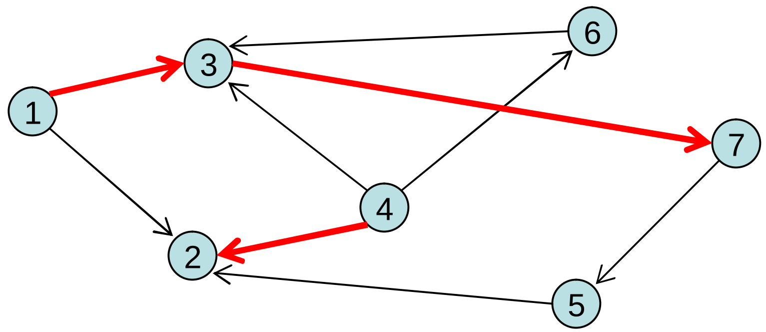
[B] non è subclusiva

[C] costituisce un matroide

Matroidi

Esercizio 2. Dato un grafo asimmetrico $G = (V, E)$, si consideri la famiglia $\mathfrak{I}$ costituita da tutti gli insiemi di archi A per i quali ogni $u \in V$ è termine di al più un arco in A.





Si associ a G un grafo bipartito $B = (V, V, F)$ dove $uv \in F$ se e solo se $uv \in E$.

Evidentemente ogni $A \in \mathfrak{I}$ corrisponde a un insieme di archi di F che è un assegnamento. Se ne deduce che $(E, \mathfrak{I})$ è un matroide.