Università di L’Aquila

Claudio Arbib

Ricerca Operativa

Basi in IR^n

Sommario

1. Combinazione lineare

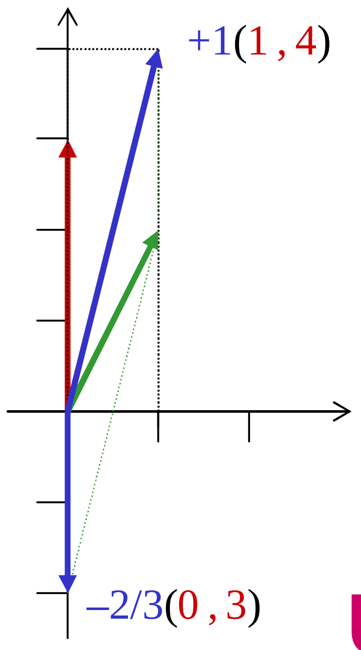
Definizione Un vettore $\mathbf{x} \in$ IR^n si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in$ IR^n con coefficienti $l_1, \ldots, l_m \in$ IR se

$$\mathbf{x} = l_1\mathbf{a}_1 + \ldots + l_m\mathbf{a}_m$$

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = l_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

con $l_1 = -2/3$, $l_2 = 1$



Ù

Combinazione affine

Definizione Un vettore $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n$ si dice *combinazione affine* dei vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathrm{IR}^n$ con coefficienti $l_1, \ldots, l_m \in \mathrm{IR}$ se

$$\mathbf{x} = l_1\mathbf{a}_1 + \ldots + l_m\mathbf{a}_m$$

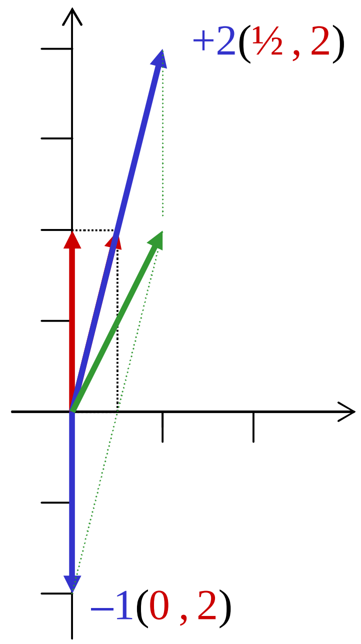
e

$$l_1 + \ldots + l_m = 1$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} ½ \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $l_1 = -1$, $l_2 = 2$



Ù

Combinazione conica

Definizione Un vettore $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n$ si dice *combinazione conica* dei vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathrm{IR}^n$ con coefficienti $l_1, \ldots, l_m \in \mathrm{IR}$ se

$$\mathbf{x} = l_1\mathbf{a}_1 + \ldots + l_m\mathbf{a}_m$$

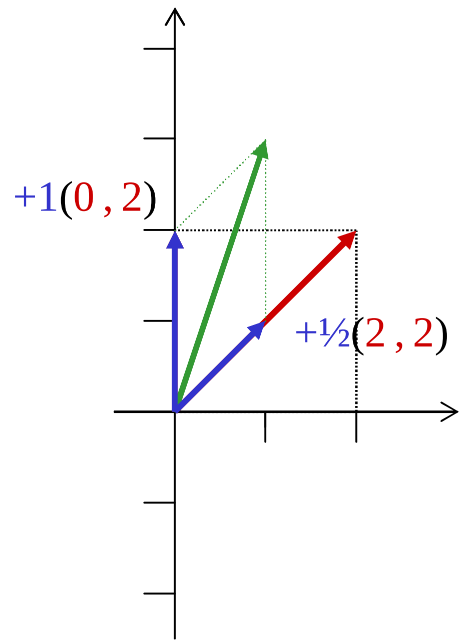
e

$$l_1, \ldots, l_m \geq 0$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $l_1 = 1$, $l_2 = ½$



Combinazione convessa

Definizione Un vettore $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n$ si dice *combinazione convessa* dei vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathrm{IR}^n$ con coefficienti $l_1, \ldots, l_m \in \mathrm{IR}$ se

$$\mathbf{x} = l_1\mathbf{a}_1 + \ldots + l_m\mathbf{a}_m$$

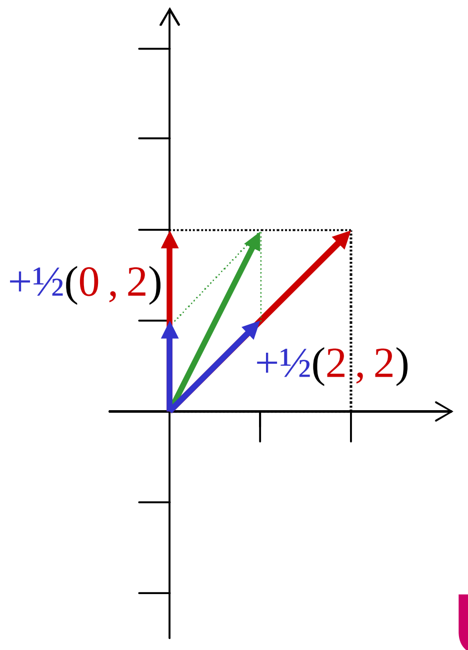
e

$$l_1 + \ldots + l_m = 1$$
$$l_1, \ldots, l_m \geq 0$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

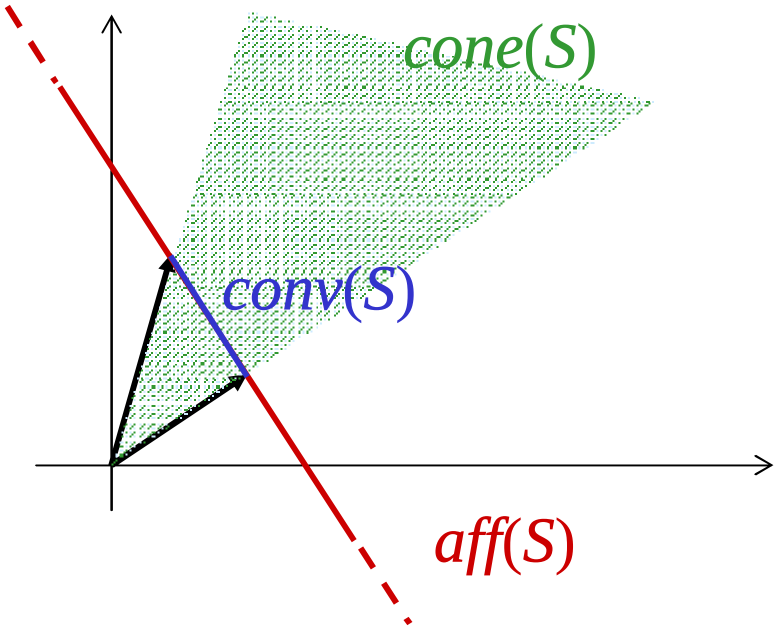
con $l_1 = ½$, $l_2 = ½$



Involucri

Definizione L'*involucro affine* (*conico*, *convesso*) di un insieme $S \subseteq \mathrm{IR}^n$ è l'insieme di tutti e soli i vettori $\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n$ ottenibili come combinazione affine (conica, convessa) dei vettori di S.

Esempio

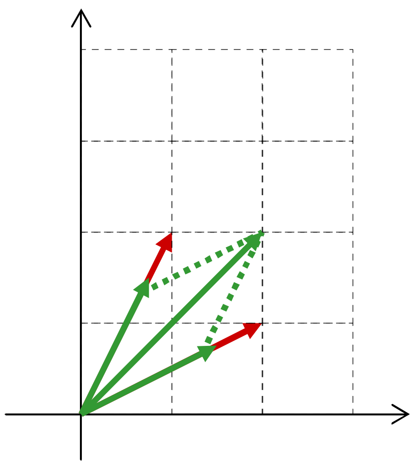


Ù

2. Dipendenza e indipendenza

<u>Definizione</u> Un insieme $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathrm{IR}^n$ è *linearmente dipendente* se esistono m scalari $l_1, \ldots, l_m$ non tutti nulli tali che $l_1\mathbf{a}_1 + \ldots + l_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$.

<u>Esempio</u>



$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente dipendente

$(l_1 = l_2 = 2/3,\ l_3 = -1)$

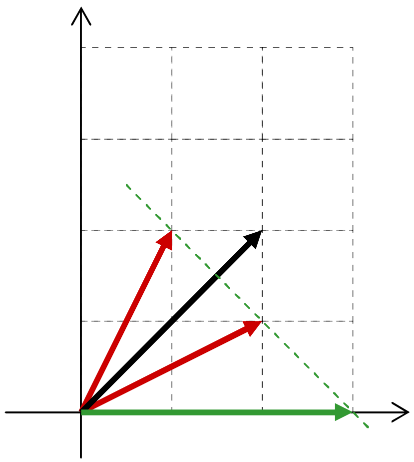
La *dipendenza affine* è definita in modo analogo aggiungendo la clausola $l_1 + \ldots + l_m = 0$.

Dipendenza e indipendenza

Definizione Un insieme $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathrm{IR}^n$ è *affinemente dipendente* se esistono m scalari $l_1, \dots, l_m$ non tutti nulli tali che $l_1 + \dots + l_m = 0$

e $l_1\mathbf{a}_1 + \dots + l_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$.

Esempio



$C = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ è affinemente dipendente

$(l_1 = l_3 = -1,\ l_2 = 2,)$

$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ è affinemente indipendente

La *dipendenza affine* è definita in modo analogo aggiungendo la clausola $l_1 + \dots + l_m = 0$.

Ù

Dipendenza e indipendenza

Osservazione Sia $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ linearmente indipendente. Allora un qualunque $X \subset A$ è a sua volta indipendente: infatti se X fosse dipendente sarebbe possibile ottenere il vettore $\mathbf{0}$ combinandone gli elementi con coefficienti l_i non tutti nulli. Aggiungendo a tale combinazione i vettori di $A - X$ moltiplicati per 0 si otterrebbe $\mathbf{0}$ da una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli degli elementi di A, contraddicendone l'indipendenza. Ne segue che

1) $A = \emptyset$ è linearmente indipendente

Viceversa, se un qualunque $X \subset A$ è linearmente dipendente, allora anche A è linearmente dipendente. In particolare,

2) $A = \{\mathbf{0}\}$ è linearmente dipendente

in quanto il vettore nullo può essere ottenuto combinandone gli elementi (in effetti, l'unico elemento) con coefficienti diversi da 0.

3. Basi

<u>Definizione</u> Sia $S \subseteq \mathrm{IR}^n$. Un insieme $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\} \subseteq \mathrm{IR}^n$ si dice *base* per S se

- B è linearmente indipendente
- $B \cup \{\mathbf{x}\}$ è lin. dipendente per ogni $\mathbf{x} \in S - B$

  (in altre parole, esistono coefficienti reali non tutti nulli $l_0, l_1, \ldots, l_m$ tali che $l_0\mathbf{x} + l_1\mathbf{b}_1 + \ldots + l_m\mathbf{b}_m = \mathbf{0}$).

Osserviamo che $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ implica $l_0 \neq 0$, altrimenti B non sarebbe indipendente.

Quindi si può scrivere

$$\mathbf{x} = - l_1\mathbf{b}_1/l_0 - \ldots - l_m\mathbf{b}_m/l_0$$

(rappresentazione di $\mathbf{x}$ in B)

Basi

Teorema 1 La rappresentazione di $\mathbf{x} \in S$ tramite una sua base B è unica.

Dimostrazione: supponiamo

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{b}_1 + \ldots + a_m\mathbf{b}_m$$
$$\mathbf{x} = g_1\mathbf{b}_1 + \ldots + g_m\mathbf{b}_m$$

Allora

$$\mathbf{0} = (a_1 - g_1)\mathbf{b}_1 + \ldots + (a_m - g_m)\mathbf{b}_m$$

e se $\exists i$: $a_i - g_i \neq 0$, allora B è linearmente dipendente (cd.).

Ù

Basi

Teorema 2 Sia $\mathbf{x} \in S - B$, con B base per S e $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
Supponiamo $\mathbf{x} = a_1\mathbf{b}_1 + \ldots + a_m\mathbf{b}_m$ con $a_1 \neq 0$.
Allora $B' = \{\mathbf{x}, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ è una base per S.

Dimostrazione: anzitutto B' è indipendente. Se non lo fosse:

$$\mathbf{0} = m_1\mathbf{x} + m_2\mathbf{b}_2 + \ldots + m_m\mathbf{b}_m$$

con $m_1 \neq 0$ (se $m_1 = 0$, B sarebbe dipendente).

Ma allora

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \qquad - m_2\mathbf{b}_2/m_1 - \ldots - m_m\mathbf{b}_m/m_1 \\ \mathbf{x} &= a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a_m\mathbf{b}_m \end{aligned}\right\} \text{contraddizione}$$

Inoltre B' è massimale in S, perché $\mathbf{y} = l_1\mathbf{b}_1 + \ldots + l_m\mathbf{b}_m$ $\forall \mathbf{y} \in S$ e sostituendo $\mathbf{b}_1 = \mathbf{x}/a_1 - a_2\mathbf{b}_2/a_1 - \ldots - a_m\mathbf{b}_m/a_1$ si ottiene una rappresentazione di $\mathbf{y}$ in B'.

Ù

4. Matroide vettoriale

Teorema 3 Sia U un insieme finito di vettori di IR^n, e $\Im$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U linearmente indipendenti. Allora $(U, \Im)$ è un matroide.

Dimostrazione: anzitutto $\Im$ è evidentemente subclusiva, in quanto ogni sottoinsieme di un insieme indipendente è indipendente.
Mostriamo che vale la proprietà di scambio:

$$\forall A, B \in \Im: |B| > |A|, \quad \exists \mathbf{x} \in B - A: A \cup \{\mathbf{x}\} \in \Im$$

cioè l'insieme linearmente indipendente più piccolo può essere accresciuto con un elemento preso dal più grande mantenendosi linearmente indipendente.

Ù

Matroide vettoriale

Teorema 3 Sia U un insieme finito di vettori di IR^n, e $\Im$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U linearmente indipendenti. Allora $(U, \Im)$ è un matroide.

Segue dimostrazione: Siano

$$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \qquad B = \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$$

Se non vale la proprietà di scambio, allora $A \cup \{\mathbf{b}_i\}$ è dipendente $\forall i$: $\mathbf{b}_i \notin A$, cioè A è una base per B.

Supponiamo $\mathbf{b}_m \notin A$: sia allora $\mathbf{b}_m = l_1\mathbf{a}_1 + \ldots + l_m\mathbf{a}_m$ e senza perdere in generalità supponiamo $l_m \neq 0$. Allora applicando il Teorema 2 si può sostituire $\mathbf{b}_m$ ad $\mathbf{a}_m$, e

$$A_m = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{b}_m\}$$ è ancora una base per B.

Se invece $\mathbf{b}_m \in A$, la sostituzione restituisce $A_m = A$ che per ipotesi è ancora una base per B.

Ù

Matroide vettoriale

Teorema 3 Sia U un insieme finito di vettori di IR^n, e $\Im$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U linearmente indipendenti. Allora $(U, \Im)$ è un matroide.

Segue dimostrazione: Procedendo in tal modo, se $\mathbf{b}_{m-1} \notin A$ possiamo scrivere

$$\mathbf{b}_{m-1} = m_1\mathbf{a}_1 + \ldots + m_{m-1}\mathbf{a}_{m-1} + m_m\mathbf{b}_m$$

osservando che $m_{m-1} \neq 0$ (altrimenti B sarebbe dipendente).

Quindi
$$A_{m-1} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m-2}, \mathbf{b}_{m-1}, \mathbf{b}_m\}$$
$$A_{m-2} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m-3}, \mathbf{b}_{m-2}, \mathbf{b}_{m-1}, \mathbf{b}_m\} \ldots$$
$$\ldots \quad A_1 = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{m-3}, \mathbf{b}_{m-2}, \mathbf{b}_{m-1}, \mathbf{b}_m\} = B - \{\mathbf{b}_0\}$$

sono basi per B. Ma allora A_1 consente di rappresentare $\mathbf{b}_0$ in funzione di $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$, contraddicendo l'indipendenza di B.

Ù