Cognome | S | O | L | U | Z | I | O | N | I | Nome | S | O | L | U | Z | I | O | N | I |

Matricola | X | X | X | X | X | X |

Ricerca Operativa - Prova scritta (I parte) (31 Marzo 2004)

Compito C/I

Esercizio #1 *(10 punti)*

I sistemi UMTS rappresentano la telefonia cellulare di III generazione (mi devo essere perso qualcosa...) e per funzionare hanno bisogno di algoritmi mooolto astuti. Infatti in un sistema UMTS i pacchetti relativi a diverse applicazioni accedono al canale trasmissivo sotto forma di unità standard dette PDU (Packet Data Unit). Una PDU è caratterizzata da una dimensione b espressa in bit: solo alcune delle possibili dimensioni sono ammissibili, in dipendenza della capacità del canale.

Al canale accedono applicazioni diverse: l'applicazione a trasmette pacchetti di lunghezza costante $b(a)$, diversa da applicazione a applicazione. Prima di accedere al canale, i pacchetti di un'applicazione riempiono un certo numero PDU: nessun pacchetto può essere troncato, perciò ciascuna PDU contiene un numero intero di pacchetti. Ad esempio, in una PDU di 256 bit entrano $\lfloor \frac{256}{28} \rfloor = 9$ pacchetti da 28 bit, e dunque $256 - 9 \cdot 28 = 4$ bit restano inutilizzati.

Nel sistema considerato le applicazioni diverse sono 8. Le lunghezze e il numero di pacchetti in coda per ciascuna applicazione, e le dimensioni ammissibili delle PDU sono riportate nelle tabelle seguenti:

Applicazione	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Lunghezza $b(a)$ di un pacchetto (bit)	12	310	28	65	74	101	215	64
Numero $n(a)$ di pacchetti in coda	102	15	230	70	13	18	25	20

Dimensioni b ammissibili per una PDU (bit)	256	512	1024	2048	4096

Tenendo presente che a ciascuna applicazione può essere associata una sola lunghezza di PDU, si vuole risolvere il problema di spedire tutti i pacchetti utilizzando il PDU per una lunghezza complessiva minima. Formulare tale problema come ottimizzazione combinatoria.

(*Suggerimento*: adottare come insieme universale un opportuno insieme di coppie, ciascuna delle quali corrisponde a una possibile scelta).

- Indicare nella tabella seguente: l'insieme universale U, la regione ammissibile $\mathcal{F}$ e la funzione peso c.

l'insieme U è formato da	**coppie (a, b) = (applicazione, lunghezza PDU)**
$X \in \mathcal{F}$ se e solo se	$\{X \subseteq U$: **X è un assegnamento di lunghezze ad applicazioni**$\}$
$\forall x \in U$, $c(x)$ vale	$c(x) = b \cdot \lceil n(a) / \lfloor b/b(a) \rfloor \rceil$ per $x = (a, b)$

- Successivamente, formula il problema risultante in termini di programmazione lineare 0-1.

$$x_{ap} = \begin{cases} 1 & \text{se per l'applicazione } a \text{ viene scelta la PDU } p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall (a, b) \in U$$

$$\min \sum_{a=1}^{8} \sum_{p=1}^{5} c_{ap} \cdot x_{ap}$$

$$\sum_{p=1}^{5} x_{ap} = 1 \qquad \forall a = 1, \ldots, 8$$

$$x_{ap} \in \{0, 1\} \qquad \forall a = 1, \ldots, 8 \qquad \forall p = 1, \ldots, 5$$

- Risolvere il problema mediante l'algoritmo greedy e riportare la soluzione nella tabella seguente:

Applicazione	A	B	C	D	E	F	G	H
Lunghezza PDU scelta	256	1024	256	512	1024	512	2048	256

L'algoritmo greedy

[A] determina una soluzione ottima, perché **il problema è un matroide partizione**

[B] non determina una soluzione ottima, perché ______________________

Esercizio #2 *(5 punti)* Applicando il metodo di Fourier-Motzkin determinare un'espressione algebrica dell'involucro convesso dei punti:

$$(-4, 1, 0)\ ,\ (1, 0, 2)$$

Si imposta il seguente sistema di disequazioni, quindi si proietta sulle sole variabili $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$

λ_1	λ_2	x_1	x_2	x_3	$\leq$ ...
-4	1	-1	0	0	0
4	-1	1	0	0	0
1	0	0	-1	0	0
-1	0	0	1	0	0
0	2	0	0	-1	0
0	-2	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1
-1	-1	0	0	0	-1
-1	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0

Domande a risposta multipla

Marcare a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Ogni risposta esatta vale 2 punti; la risposta errata verrà valutata -1 punti; la domanda senza risposta vale 0 punti.

1. Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico e $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ una partizione in clique di G. Sul grafo complemento $\bar{G}$ l'insieme $\mathcal{C}$ rappresenta:

   [A] un taglio

   [B] una partizione in insiemi dominanti

   [C] **una colorazione**

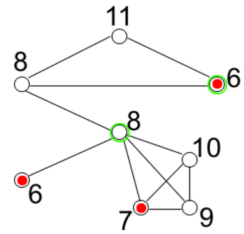
2. In un grafo bipartito $G = (V, V', E)$ sia F un assegnamento di V a V' ed F' un assegnamento di V' a V. Quale, tra le seguenti, è vera:

   [A] $F \cup F'$ è sempre un matching

   [B] F e F' sono sempre matching

   [C] $\boldsymbol{F \cap F'}$ **è sempre un matching**

3. L'algoritmo greedy per il calcolo dell'insieme dominante di peso minimo applicato al grafo in figura



[A] trova la soluzione ottima di valore $\boxed{}$

[B] non trova la soluzione ottima, perché **la soluzione del greedy vale 19 mentre l'ottimo vale 14**

[C] non è applicabile, perché ______________________________

4. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un insieme finito. Fissato $r > 0$, sia $\mathcal{F}_r$ la famiglia costituita da tutti gli $X \subseteq U$ tali che $(x, y) \in X$ se e solo se $x^2 + y^2 \leq r^2$. La coppia $(U, \mathcal{F}_r)$:

[A] non è subclusiva

[B] è subclusiva ma non è un matroide

[C] **è un matroide**

5. Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$ si definisce la famiglia $\mathcal{F} \subseteq 2^V$:

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq V \mid \forall u \in X, \forall v \in V - X \Longrightarrow uv \in E\}$$

[A] **$\mathcal{F}$ non è subclusiva**

[B] $\mathcal{F}$ è subclusiva ma non non gode della proprietà di scambio

[C] $\mathcal{F}$ gode della proprietà di scambio