Sistemi compatibili

(Il metodo di Fourier-Motzkin)

Claudio Arbib

Università degli Studi di L'Aquila

OTTIMIZZAZIONE INDUSTRIALE & LOGISTICA

Sommario

- Poliedri
- Poliedri compatibili
- Diseguaglianze implicate
- Proiezione di un poliedro
  - Definizione
  - Esempi
- Teorema di Fourier
- Algoritmo di Fourier-Motzkin
- Applicazioni

Poliedri

Definizione:

Siano $\mathbf{a} \in \mathrm{IR}^n$, $b \in \mathrm{IR}$. L'insieme

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \colon \mathbf{ax} = b\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

si dice iperpiano. L'insieme

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \colon \mathbf{ax} \le b\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

si dice semispazio chiuso.

Definizione:

Un poliedro è l'intersezione di un numero finito m di semispazi chiusi di IR^n.

Quindi $\forall\ \mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathrm{IR}^m$ l'insieme

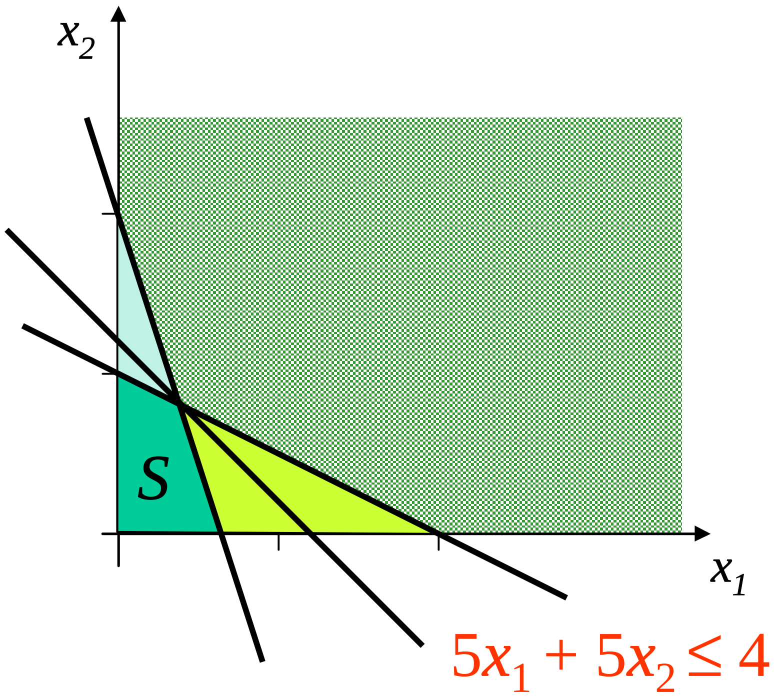
$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n \colon \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\} \subseteq \mathrm{IR}^n$$

definisce un poliedro. In particolare, $\emptyset$, H, S, IR^n sono poliedri.

Diseguaglianze implicate

Definizione:

b**x** £ *g* è una diseguaglianza implicata dal sistema **Ax** £ **b**
se ogni **x** che soddisfa **Ax** £ **b** soddisfa anche b**x** £ *g*



$$
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & x_2 & \geq & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\
3x_1 & + & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

Diseguaglianze implicate

Definizione:

Un sistema di diseguaglianze è minimale se non contiene diseguaglianze implicate.

Definizione:

b**x** $\leq \gamma$ è combinazione conica delle diseguaglianze **Ax** £ **b** º $\{\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i\ , i = 1, \ldots, m\}$ se e solo se

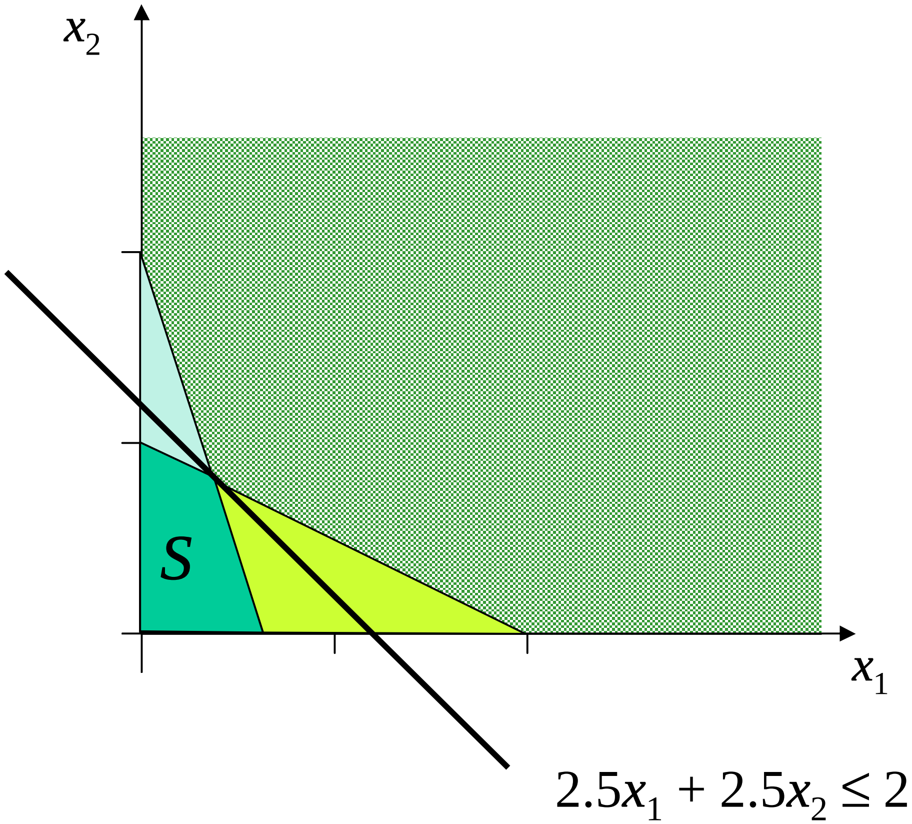
$$(\mathrm{b}, \gamma) = \sum l_i(\mathbf{a}_i, b_i) \qquad l_i \geq 0$$

Teorema:

Ogni diseguaglianza ottenuta come combinazione conica di **Ax** £ **b** è una diseguaglianza implicata.

Diseguaglianze implicate

Esempio:



$$
\begin{array}{rrrrl}
0 & (-1, & 0, & 0) & + \\
0 & (0, & -1, & 0) & + \\
1 & (1, & 2, & 1) & + \\
0.5 & (3, & 1, & 2) & = \\
\hline
 & (2.5, & 2.5, & 1.5) &
\end{array}
$$

$l = (1, 0.5, 0, 0)$

Poliedri compatibili

Definizione:

Un poliedro si dice compatibile (incompatibile) se (non) ammette soluzione.

Problema:

Stabilire se un dato poliedro $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ è o no compatibile

Principio:

Ciò che esiste, fa ombra

(Corollario: i vampiri non esistono)

Proiezione di un poliedro

Definizione: Sia $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathrm{IR}^n$ un poliedro.

Allora il poliedro $P(\mathbf{A}', \mathbf{b}') \subseteq \mathrm{IR}^{n-1}$ si dice proiezione di $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ se $\forall \mathbf{x} \in P(\mathbf{A}', \mathbf{b}')\ \exists z \in \mathrm{IR}$ tale che $(\mathbf{x}, z) \in P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Esempio:

P: $\quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P' : $\quad 0 \leq x_1 \leq 2$

poniamo $z = (6 - 3x_1)/2 \geq 0 \qquad \forall x_1 \in P'$

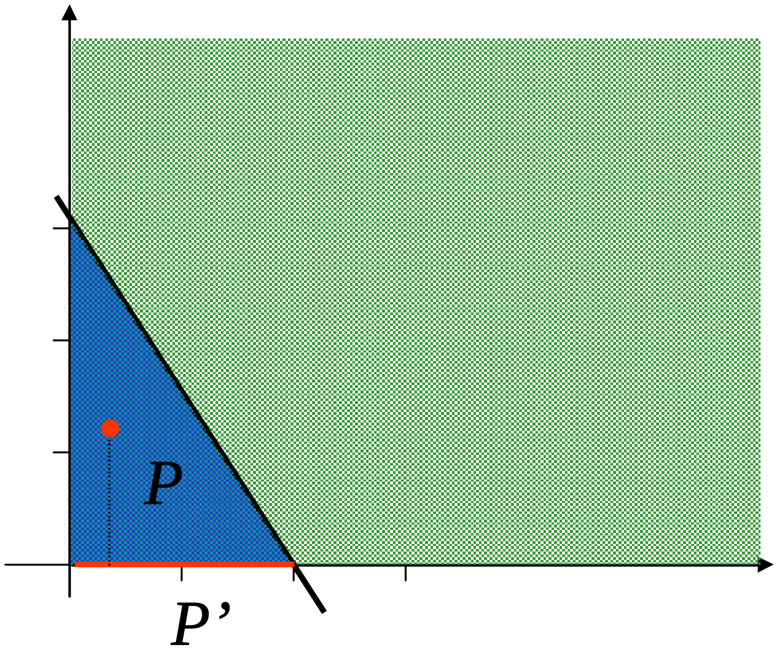
evidentemente $(x_1, (6 - 3x_1)/2) \in P \qquad \forall x_1 \in P'$

Proiezione di un poliedro

Esempio:

P : $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P': $0 \leq x_1 \leq 2$



$\forall x_1 \in P', \exists z: (x_1, z) \in P$

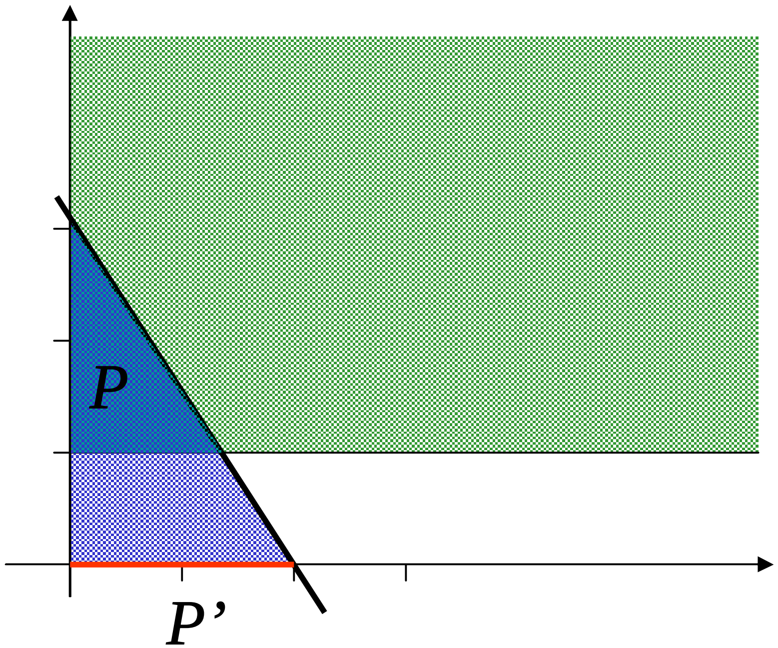
$\Rightarrow$ P' è proiezione di P

Proiezione di un poliedro

Esempio:

P : $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 1$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P': $0 \leq x_1 \leq 2$



$\nexists$ $\mathbf{x} \in P$ tale che $x_1 = 2$

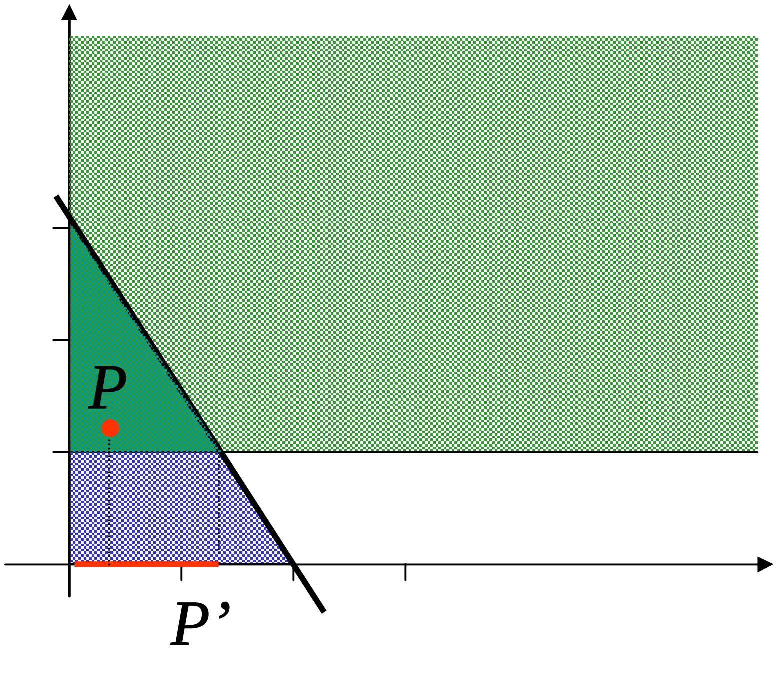
$\Rightarrow$ *P'* non è proiezione di *P*

Proiezione di un poliedro

Esempio:

P : $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 1$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

P' : $0 \leq x_1 \leq 4/3$



P' è proiezione di P?

Teorema di Fourier

Sia dato il poliedro P

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m
\end{aligned}
$$

Dividiamo l'insieme delle righe R in 3 sottoinsiemi:

$$R_0 = \{i \in R: a_{i1} = 0\},\ R^+ = \{i \in R: a_{i1} > 0\},\ R^- = \{i \in R: a_{i1} < 0\}$$

Costruiamo un nuovo poliedro P' contenente:

1) tutte le diseguaglianze di R_0
2) una diseguaglianza per ogni elemento in $R^+ \times R^-$

Teorema di Fourier

- Una diseguaglianza del tipo (2) è associata a una riga $h \in R^+$ e una riga $k \in R^-$

$$a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hn}x_n \le b_h \quad \Leftarrow \boxed{\text{riga } h}$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \quad \Leftarrow \boxed{\text{riga } k}$$

- La diseguaglianza di *P'* si ottiene per combinazione conica delle due
  - dividendo la prima per a_{h1}
  - dividendo la seconda per $|a_{k1}|$
  - sommandole insieme

$$\cancel{\left(\frac{a_{h1}}{a_{h1}} + \frac{a_{k1}}{|a_{k1}|}\right)} x_1 + \left(\frac{a_{h2}}{a_{h1}} + \frac{a_{k2}}{|a_{k1}|}\right) x_2 + \ldots + \left(\frac{a_{hn}}{a_{h1}} + \frac{a_{kn}}{|a_{k1}|}\right) x_n \le \left(\frac{b_h}{a_{h1}} + \frac{b_k}{|a_{k1}|}\right)$$

Teorema di Fourier

- Il nuovo sistema di diseguaglianze P' non contiene la variabile x_1

Teorema (Fourier) *P'* è una proiezione di *P* nello spazio delle variabili $x_2, \ldots, x_n$.

Dimostrazione

- Sia $\mathbf{w} = (w_2, \ldots, w_n) \in P'$. Dobbiamo mostrare che esiste uno scalare z tale che $(z, w_2, \ldots, w_n) \in P$.
- Per ogni $i \in R_0$ si ha $a_{i2}w_2 + \ldots + a_{in}w_n \leq b_i$
- Per ogni $h \in R^+$, $k \in R^-$ si ha inoltre

$$\left(\frac{a_{h2}}{a_{h1}} + \frac{a_{k2}}{|a_{k1}|}\right) w_2 + \ldots + \left(\frac{a_{hn}}{a_{h1}} + \frac{a_{kn}}{|a_{k1}|}\right) w_n \leq \left(\frac{b_h}{a_{h1}} + \frac{b_k}{|a_{k1}|}\right)$$

Teorema di Fourier (seguito)

- Riscriviamo l'ultima condizione

$$\frac{a_{k2}w_2}{|a_{k1}|} + \ldots + \frac{a_{kn}w_n}{|a_{k1}|} - \frac{b_k}{|a_{k1}|} \leq \frac{b_h}{a_{h1}} - \frac{a_{h2}w_2}{a_{h1}} - \frac{a_{hn}w_n}{a_{h1}}$$

- Al variare di k in R^- (di h in R^+) il primo (secondo) membro descrive una classe C (una classe D) di numeri reali, e tutti gli elementi di C risultano $\leq$ degli elementi di D
- Dunque esiste un elemento di separazione z tale che:

$$\frac{a_{k2}w_2}{|a_{k1}|} + \ldots + \frac{a_{kn}w_n}{|a_{k1}|} - \frac{b_k}{|a_{k1}|} \leq z \qquad \forall k \in R^-$$

$$\forall h \in R^+ \qquad z \leq \frac{b_h}{a_{h1}} - \frac{a_{h2}w_2}{a_{h1}} - \frac{a_{hn}w_n}{a_{h1}}$$

Teorema di Fourier (seguito)

- Le ultime due diseguaglianze si possono riscrivere:

$$a_{k1}z + a_{k2}w_2 + \ldots\ a_{kn}w_n \ \leq\ b_k \qquad\qquad \forall k \in R^-$$

$$a_{h1}z + a_{h2}w_2 + \ldots\ a_{hn}w_n \ \leq\ b_h \qquad\qquad \forall h \in R^+$$

- Inoltre, $\forall i \in R_0$ si ha

$$0z + a_{i2}w_2 + \ldots\ a_{in}w_n \ \leq\ b_i$$

- Ne segue che $(z, w_2, \ldots, w_n) \in P$

Fine della dimostrazione

Algoritmo di Fourier-Motzkin

- Il Teorema di Fourier permette di ridurre il problema di decidere se un poliedro è o meno vuoto a quello di decidere se è o meno vuota una sua proiezione
- Poiché la proiezione di un poliedro è ancora un poliedro, il teorema può essere ripetutamente applicato, fino a pervenire a un poliedro del quale sia semplice decidere
- Ad esempio, si può applicare il teorema $n - 1$ volte: in questo caso il poliedro risultante $P^{(n-1)}$ sarà un intervallo dell'asse reale, eventualmente vuoto o illimitato
- Ovvero, si può applicare il teorema per n volte: in questo caso il poliedro risultante $P^{(n)}$ avrà la forma $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{t}$. Si danno allora 2 casi:
  - se $\mathbf{t} \geq 0$, $P^{(n)}$ è banalmente compatibile, in quanto descrive l'intero IR^n, e quindi anche P è compatibile;
  - se esiste un indice i tale che $t_i < 0$, allora $P^{(n)}$ è banalmente incompatibile, e così P.

Applicazioni

Il metodo di eliminazione di Fourier-Motzkin si può applicare per

- Decidere se un poliedro è vuoto oppure no
- Costruire la rappresentazione implicita di conv(S) per un insieme finito $S \subset \mathrm{IR}^n$
- Risolvere un problema di Programmazione Lineare