



Università di L'Aquila



Claudio Arbib

Ricerca Operativa

Basi in \mathbb{R}^n

Sommario

- Combinazione lineare, affine, conica e convessa
- Dipendenza e indipendenza lineare e affine
- Basi per un insieme di vettori di \mathbb{R}^n
- Teorema di rappresentazione
- Teorema di sostituzione (Steinitz)
- Matroide vettoriale

Combinazione lineare

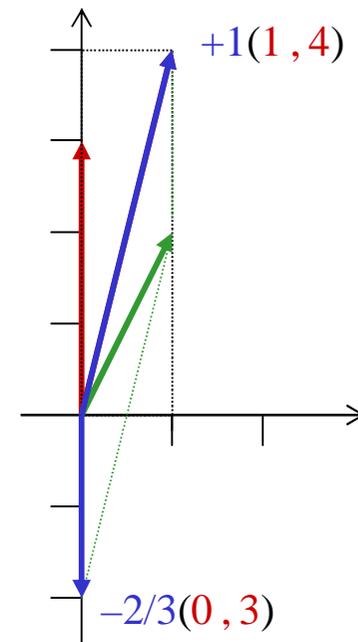
Definizione Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ con coefficienti $l_1, \dots, l_m \in \mathbb{R}$ se

$$\mathbf{x} = l_1 \mathbf{a}_1 + \dots + l_m \mathbf{a}_m$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

con $l_1 = -2/3, l_2 = 1$



Combinazione affine

Definizione

Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione affine* dei vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ con coefficienti $l_1, \dots, l_m \in \mathbb{R}$ se

$$\mathbf{x} = l_1 \mathbf{a}_1 + \dots + l_m \mathbf{a}_m$$

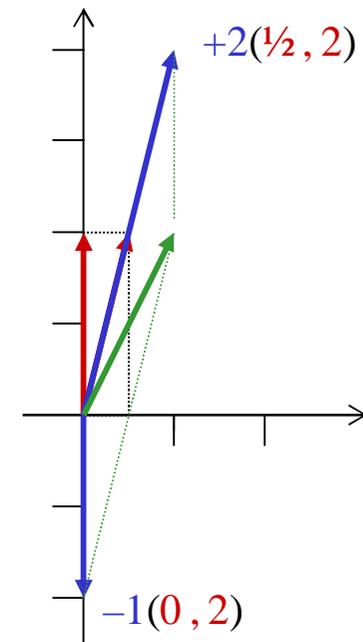
e

$$l_1 + \dots + l_m = 1$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $l_1 = -1, l_2 = 2$



Combinazione conica

Definizione

Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione conica* dei vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ con coefficienti $l_1, \dots, l_m \in \mathbb{R}$ se

$$\mathbf{x} = l_1 \mathbf{a}_1 + \dots + l_m \mathbf{a}_m$$

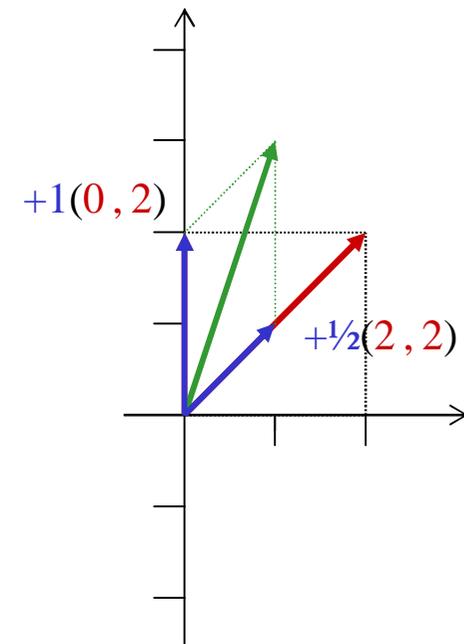
e

$$l_1, \dots, l_m \geq 0$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $l_1 = 1, l_2 = \frac{1}{2}$



Combinazione convessa

Definizione

Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione convessa* dei vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ con coefficienti $l_1, \dots, l_m \in \mathbb{R}$ se

$$\mathbf{x} = l_1 \mathbf{a}_1 + \dots + l_m \mathbf{a}_m$$

e

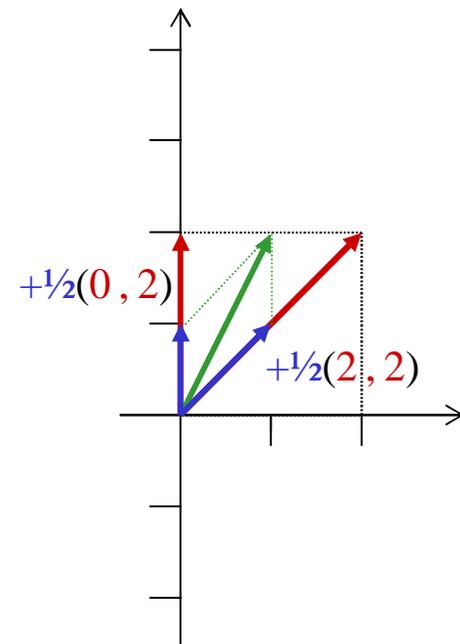
$$l_1 + \dots + l_m = 1$$

$$l_1, \dots, l_m \geq 0$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $l_1 = 1/2, l_2 = 1/2$

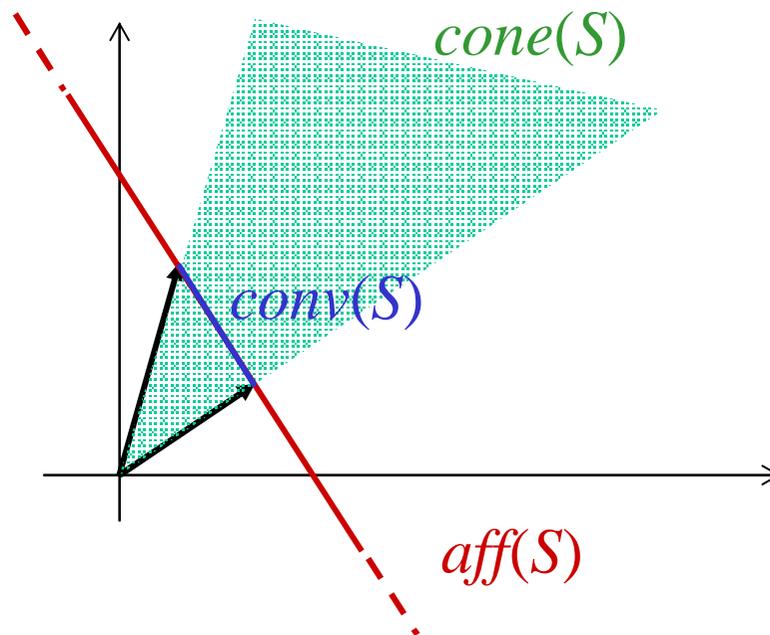


Involucri

Definizione

L'involucro *affine* (*conico*, *convesso*) di un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutti e soli i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ottenibili come combinazione affine (conica, convessa) dei vettori di S .

Esempio

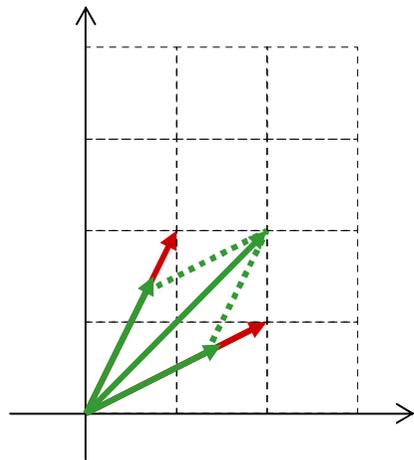


Dipendenza e indipendenza

Definizione

Un insieme $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è *linearmente dipendente* se esistono m scalari l_1, \dots, l_m non tutti nulli tali che $l_1\mathbf{a}_1 + \dots + l_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$.

Esempio



$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{è linearmente indipendente}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{è linearmente dipendente}$$

$(l_1 = l_2 = 2/3, l_3 = -1)$

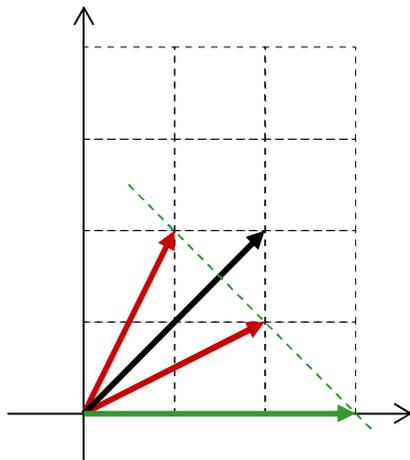
La *dipendenza affine* è definita in modo analogo aggiungendo la clausola $l_1 + \dots + l_m = 0$.

Dipendenza e indipendenza

Definizione

Un insieme $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è *affinementemente dipendente* se esistono m scalari l_1, \dots, l_m non tutti nulli tali che $l_1 + \dots + l_m = 0$
e $l_1\mathbf{a}_1 + \dots + l_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$.

Esempio



$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è affinementemente dipendente
($l_1 = l_3 = -1, l_2 = 2,$)

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è affinementemente indipendente

La *dipendenza affine* è definita in modo analogo aggiungendo la clausola $l_1 + \dots + l_m = 0$.

Dipendenza e indipendenza

Osservazione Sia $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ linearmente **indipendente**. Allora **un qualunque** $X \subset A$ è a sua volta **indipendente**: infatti se X fosse dipendente sarebbe possibile ottenere il vettore $\mathbf{0}$ combinandone gli elementi con coefficienti l_i non tutti nulli. Aggiungendo a tale combinazione i vettori di $A - X$ moltiplicati per 0 si otterrebbe $\mathbf{0}$ da una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli degli elementi di A , contraddicendone l'indipendenza. Ne segue che

1) $A = \emptyset$ è **linearmente indipendente**

Viceversa, se **un qualunque** $X \subset A$ è linearmente **dipendente**, allora **anche** A è linearmente **dipendente**. In particolare,

2) $A = \{\mathbf{0}\}$ è **linearmente dipendente**

in quanto il vettore nullo può essere ottenuto combinandone gli elementi (in effetti, l'unico elemento) con coefficienti diversi da 0.

Basi

Definizione Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un insieme $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *base* per S se

- B è linearmente **indipendente**
- $B \cup \{\mathbf{x}\}$ è linearmente **dipendente** per ogni $\mathbf{x} \in S - B$
(in altre parole, esistono coefficienti reali non tutti nulli l_0, l_1, \dots, l_m tali che $l_0\mathbf{x} + l_1\mathbf{b}_1 + \dots + l_m\mathbf{b}_m = \mathbf{0}$).

Osserviamo che $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ implica $l_0 \neq 0$, altrimenti B non sarebbe indipendente.

Quindi si può scrivere

$$\mathbf{x} = -l_1\mathbf{b}_1/l_0 - \dots - l_m\mathbf{b}_m/l_0$$

(rappresentazione di \mathbf{x} in B)

Basi

Teorema 1 La rappresentazione di $\mathbf{x} \in S$ tramite una sua base B è **unica**.

Dimostrazione: supponiamo

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{b}_1 + \dots + a_m \mathbf{b}_m$$

$$\mathbf{x} = g_1 \mathbf{b}_1 + \dots + g_m \mathbf{b}_m$$

Allora

$$\mathbf{0} = (a_1 - g_1) \mathbf{b}_1 + \dots + (a_m - g_m) \mathbf{b}_m$$

e se $\exists i: a_i - g_i \neq 0$, allora B è linearmente **dipendente** (cd.).

Basi

Teorema 2 Sia $\mathbf{x} \in S - B$, con B base per S e $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Supponiamo $\mathbf{x} = a_1 \mathbf{b}_1 + \dots + a_m \mathbf{b}_m$ con $a_1 \neq 0$.

Allora $B' = \{\mathbf{x}, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ è una base per S .

Dimostrazione: anzitutto B' è indipendente. Se non lo fosse:

$$\mathbf{0} = m_1 \mathbf{x} + m_2 \mathbf{b}_2 + \dots + m_m \mathbf{b}_m$$

con $m_1 \neq 0$ (se $m_1 = 0$, B sarebbe dipendente).

Ma allora

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} = -m_2 \mathbf{b}_2 / m_1 - \dots - m_m \mathbf{b}_m / m_1 \\ \mathbf{x} = a_1 \mathbf{b}_1 + a_2 \mathbf{b}_2 + \dots + a_m \mathbf{b}_m \end{array} \right\} \text{contraddizione}$$

Inoltre B' è massimale in S , perché $\mathbf{y} = l_1 \mathbf{b}_1 + \dots + l_m \mathbf{b}_m \quad \forall \mathbf{y} \in S$

e sostituendo $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{x}/a_1 - a_2 \mathbf{b}_2/a_1 - \dots - a_m \mathbf{b}_m/a_1$ si ottiene una rappresentazione di \mathbf{y} in B' .

Matroide vettoriale

Teorema 3 Sia U un insieme finito di vettori di \mathbb{R}^n , e \mathfrak{S} la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U linearmente indipendenti. Allora (U, \mathfrak{S}) è un matroide.

Dimostrazione: anzitutto \mathfrak{S} è evidentemente subclusiva, in quanto ogni sottoinsieme di un insieme indipendente è indipendente.

Mostriamo che vale la proprietà di scambio:

$$\forall A, B \in \mathfrak{S}: |B| > |A|, \quad \exists \mathbf{x} \in B - A: A \cup \{\mathbf{x}\} \in \mathfrak{S}$$

cioè l'insieme linearmente indipendente più piccolo può essere accresciuto con un elemento preso dal più grande mantenendosi linearmente indipendente.

Matroide vettoriale

Teorema 3 Sia U un insieme finito di vettori di \mathbb{R}^n , e \mathfrak{S} la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U linearmente indipendenti. Allora (U, \mathfrak{S}) è un matroide.

Segue dimostrazione: Siano

$$A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \qquad B = \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$$

Se non vale la proprietà di scambio, allora $A \cup \{\mathbf{b}_i\}$ è dipendente $\forall i$, cioè A è una base per B .

Sia allora $\mathbf{b}_m = I_1 \mathbf{a}_1 + \dots + I_m \mathbf{a}_m$ e senza perdere in generalità supponiamo $I_m \neq 0$.

Allora applicando il Teorema 2 si può sostituire \mathbf{b}_m ad \mathbf{a}_m , e

$$A_m = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{b}_m\} \qquad \text{è ancora una base per } B.$$

Matroide vettoriale

Teorema 3 Sia U un insieme finito di vettori di \mathbb{R}^n , e \mathfrak{S} la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U linearmente indipendenti. Allora (U, \mathfrak{S}) è un matroide.

Segue dimostrazione: Procedendo in tal modo, scriviamo

$$\mathbf{b}_{m-1} = m_1 \mathbf{a}_1 + \dots + m_{m-1} \mathbf{a}_{m-1} + m_m \mathbf{b}_m$$

osservando che $m_{m-1} \neq 0$ (altrimenti B sarebbe dipendente).

Quindi

$$\begin{aligned} A_{m-1} &= \{ \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-2}, \mathbf{b}_{m-1}, \mathbf{b}_m \} \\ A_{m-2} &= \{ \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-3}, \mathbf{b}_{m-2}, \mathbf{b}_{m-1}, \mathbf{b}_m \} \dots \\ \dots \quad A_1 &= \{ \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{m-3}, \mathbf{b}_{m-2}, \mathbf{b}_{m-1}, \mathbf{b}_m \} = B - \{ \mathbf{b}_0 \} \end{aligned}$$

sono basi per B . Ma allora A_1 consente di rappresentare \mathbf{b}_0 in funzione di $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$, contraddicendo l'indipendenza di B .