

1. Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, sia U l'insieme delle clique di G . La famiglia $\mathfrak{S}$ formata da tutti gli insiemi $X \subseteq U$ che coprono i nodi di G

- (A) è subclusiva
 (B) gode della proprietà di scambio
 (C) è un matroide

2. Scrivere il duale del problema

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - 2x_2 + x_4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 \leq -2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ & 2x_2 + x_4 \geq 3 \\ & x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & 2y_1 - y_2 + 3y_3 \\ & -y_1 + y_2 = 1 \\ & -y_2 + 2y_3 = -2 \\ & -y_1 + 2y_2 \leq 0 \\ & y_1 + y_3 \leq 1 \\ & y_1, y_3 \geq 0 \end{array}$$

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini una soluzione ottima del problema

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_1 \leq -2 \\ & x_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, 5 \end{array}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
-1	2	1	3	1	0
1	-2	-1	-3	-1	0
0	1	-2	1	1	1
0	2	2	2	1	1
0	2	1	4	1	1
0	1	0	0	0	-2

z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
0	0	0	0	0	0
1	-1	-3	-2	0	1
1	0	1	-1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	-2

$$\begin{array}{ccccc|c} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \leq \\ 1 & 0 & -3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \leq \\ 4 & 0 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \leq \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}$$

Il valore massimo di z è $7/9$. Una soluzione ottima è $x_1 = -2$, $x_2 = 4/9$, $x_3 = 2/9$, $x_4 = 11/3$.

4. Dati i problemi di PL

$$(P) \quad \begin{array}{ll} z = \min & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{Dx} \geq \mathbf{d} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

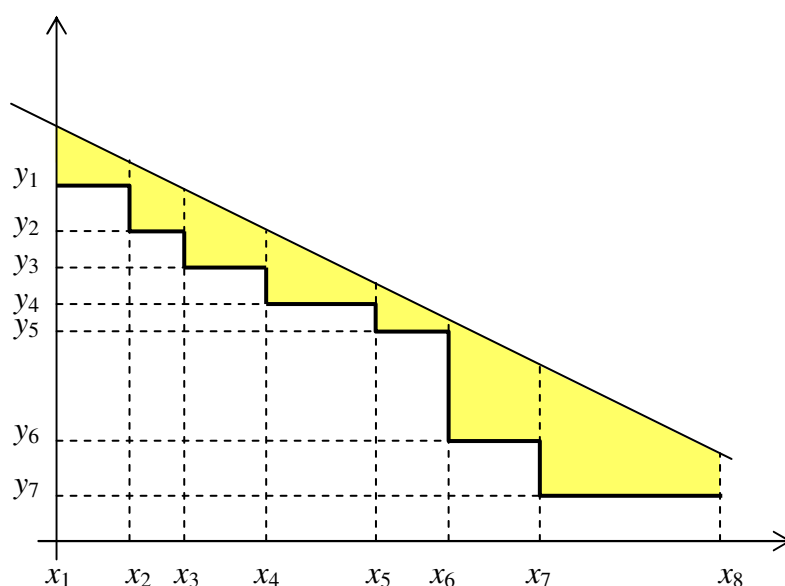
$$(P') \quad \begin{array}{ll} z' = \min & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Dx} \geq \mathbf{d} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- (A) $z' \leq z$
- (B) $z \leq z'$
- (C) $z' > z$

5. Fitting lineare

Si formuli come programmazione lineare il problema di individuare l'equazione $y = ax + b$ di una retta che si trovi al di sopra della spezzata di figura e abbia da essa distanza minima, dove la distanza è definita come l'area della superficie colorata.



Sia la spezzata individuata da $2n$ punti di coordinate (x_k, y_k) , (x_{k+1}, y_{k+1}) , $k = 1, \dots, n$. L'area indicata è data dalla somma dei trapezi aventi base maggiore $(ax_k + b - y_k)$, base minore $(ax_{k+1} + b - y_{k+1})$ e altezza $(x_{k+1} - x_k)$ per $k = 1, \dots, n$. Quindi il doppio dell'area è complessivamente dato da

$$2A(a, b) = \sum_{k=1}^n [a(x_{k+1} + x_k) + 2b - 2y_k](x_{k+1} - x_k)$$

Ponendo

$$p = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \quad q = \sum (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$$

l'obiettivo del problema si scrive

$$\min \quad pa + 2qb$$

Più semplicemente, ma in modo del tutto equivalente, possiamo esprimere l'area colorata come la differenza tra l'area del trapezio di base minore $(ax_{n+1} + b)$, base maggiore $(ax_1 + b)$ e altezza $(x_{n+1} - x_1)$, e l'area C sottesa dalla spezzata. Quindi

$$2A(a, b) = [(ax_{n+1} + b) + (ax_1 + b)](x_{n+1} - x_1) - 2C = [a(x_{n+1} + x_1) + 2b](x_{n+1} - x_1) - 2C$$

Poiché x_1, x_{n+1} sono costanti note e C ha un'espressione indipendente da a e b , il nostro problema si riduce a

$$\min \quad (x_{n+1} + x_1)a + 2b$$

soggetto ai vincoli

$$x_{k+1}a + b \geq y_k \quad k = 1, \dots, n$$

i quali esprimono il fatto che la retta si trova sempre al di sopra della spezzata.

6. You wrote it? Then solve it.

Scrivere il duale del problema precedente e risolverlo per la spezzata individuata dai 6 punti $(0, 6)$, $(2, 6)$, $(2, 5)$, $(5, 5)$, $(5, 2)$, $(8, 2)$. Si riportino le tabelle canoniche iniziale e finale.

Problema duale:

$$\max \quad \sum_{k=1}^n y_k u_k$$

$$\sum_{k=1}^n x_{k+1} u_k = x_{n+1} + x_1$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = 2$$

$$u_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n$$

Per i punti dati si ha $x_{n+1} + x_1 = 8$, e il problema si riscrive:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6u_1 + 5u_2 + 2u_3 \\ & 2u_1 + 5u_2 + 8u_3 = 8 \\ & u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (P)$$

Costruiamo una tabella canonica di (P) resolvendo il problema ausiliario

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1 + w_2 \\ & 2u_1 + 5u_2 + 8u_3 + w_1 = 8 \\ & u_1 + u_2 + u_3 + w_2 = 2 \\ & u_1, u_2, u_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

la cui tabella

u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
0	0	0	1	1	0
2	5	8	1	0	8
1	1	1	0	1	2

si scrive facilmente in forma canonica:

u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
-3	-6	-7	0	0	-10
2	5	8	1	0	8
1	1	1	0	1	2

Operando un pivot in posizione 1, 3 si ha:

u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
-5/4	-13/8	0	7/8	0	-3
1/4	5/8	1	1/8	0	1
3/4	3/8	0	-1/8	1	1

Operando poi un pivot in posizione 1, 2 si ottiene:

u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
-3/5	0	13/5	6/5	0	-2/5
2/5	1	8/5	1/5	0	8/5
3/5	0	-3/5	-1/5	1	2/5

Operando infine un pivot in posizione 2, 1 si ricava:

u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
0	0	2	1	3/5	0
0	1	2	1/3	-2/5	4/3
1	0	-1	-1/3	1	2/3

Poiché le variabili ausiliarie w_1, w_2 sono entrambe uscite di base, il problema (P) ammette soluzione $u_1 = 2/3, u_2 = 4/3$. Scrivendo la tabella corrispondente

u_1	u_2	u_3	
6	5	2	0
0	1	2	4/3
1	0	-1	2/3

e rendendola canonica

u_1	u_2	u_3	
0	0	-2	32/3
0	1	2	4/3
1	0	-1	2/3

si vede che i costi ridotti sono tutti non positivi, quindi la soluzione trovata è ottima.