

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).

Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punto.

1. Sia U un insieme finito di $\mathbf{R}^n$ e $\mathfrak{S}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U linearmente dipendenti. Indicare quale tra le seguenti affermazioni è vera:

A) $(U; \mathfrak{S})$ è un matroide

B) $\mathfrak{S}$ gode della proprietà di scambio

C) $\mathfrak{S}$ è subclusiva.

2. Scrivere il duale del problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ & x_2 + 3x_3 - x_4 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + 5y_2 - 2y_3 \\ & y_2 + y_3 \leq 2 \\ & -y_1 + y_3 \leq 1 \\ & -3y_1 - 2y_2 - y_3 = -1 \\ & y_1 + y_2 = -1 \\ & y_1, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini una soluzione ottima del problema

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 - x_4 \leq 1 \\ & x_2 - x_3 - x_4 \leq 1 \\ & x_3 \leq -1 \\ & x_2 \leq -1 \\ & x_i \in \mathbf{R}, i=1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Soluzione:

z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	≤
-1	1	3	2	1	0
1	-1	-3	-2	-1	0
0	1	-2	1	1	2
0	1	1	0	-1	1
0	0	1	-1	-1	1
0	0	0	1	0	-1
0	0	1	0	0	1

z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	≤
0	0	0	0	0	0
1	0	-5	-1	0	2
1	0	-2	-2	-2	1
0	0	1	-1	-1	1
0	0	0	1	0	-1
0	0	1	0	0	1

z	x ₂	x ₃	≤
1	-5	-1	2
0	0	1	-1
0	1	0	1

z	x ₂	≤
1	-5	1
0	1	1

Il valore massimo di z è 6.

4. Dati i problemi di PL

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P)} \quad z = \max \mathbf{c}\mathbf{x} & \text{(P')} \quad z' = \max \mathbf{c}\mathbf{x} \\
 \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{d} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\
 \mathbf{x} \geq \mathbf{0} &
 \end{array}$$

dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- (A) $z' \geq z$,
- (B) $z \geq z'$,
- (C) $z > z'$

Risolvere i seguenti esercizi. La soluzione viene valutata fino a 5 punti.

1. www.trenitalia.com

In una tratta ferroviaria a binario unico durante la giornata circolano n treni in successione. Il k -esimo treno è atteso in stazione all'ora d_k , ma una normativa recentemente introdotta richiede, per motivi di sicurezza, che tra questo treno e il precedente intercorrano almeno t_k minuti: ragion per cui il reale orario di arrivo a_k del treno k -esimo potrebbe essere diverso da d_k . Ovviamente, se $a_k \leq d_k$, nessun problema, però se $a_k > d_k$ la qualità del servizio si deteriora. La direzione delle ferrovie, in attesa dell'entrata in vigore del nuovo orario a fine stagione, e volendo d'altra parte adeguare la schedulazione dei treni sulla tratta in modo da minimizzare i disagi all'utenza, ha pensato di penalizzare ogni minuto di ritardo in arrivo del treno k con $w_k > 0$ euro e si è posta l'obiettivo di minimizzare la penalità complessiva. Formulate questo problema come programmazione lineare.

Soluzione:

Il problema consiste nello scegliere gli orari di arrivo effettivo in stazione degli n treni rispettando le distanze temporali tra ogni treno e il successivo, e allo stesso tempo minimizzando il ritardo pesato conseguito complessivamente dagli n treni. Le nostre variabili di decisione saranno quindi le a_k , definite per $k = 1, \dots, n$. Tali variabili devono soddisfare i seguenti vincoli:

$$a_{k+1} \geq a_k + t_{k+1} \quad \text{per } k = 1, \dots, n-1$$

Il ritardo r_k del k -esimo treno sull'orario previsto è pari a $a_k - d_k$ se $a_k > d_k$, mentre è pari a 0 se $a_k \leq d_k$. Quindi r_k soddisfa certamente

$$\begin{aligned} r_k &\geq a_k - d_k \\ r_k &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{per } k = 1, \dots, n$$

L'obiettivo consiste nel minimizzare la somma dei ritardi degli n treni pesati con i fattori w_k :

$$\min \quad \sum_{k=1}^n w_k r_k$$

2. Voila la solution

Usando il metodo del simpleso dimostrate che se i treni sono $n = 3$ e si ha $t_2 = 5$, $t_3 = 6$, per $d_1 = 0$, $d_2 = 4$ e $d_3 = 7$ esiste una soluzione senza alcun ritardo.

Soluzione:

Per dimostrare la tesi basta far vedere che il problema formulato all'Esercizio 1 ammette nel caso in esame una soluzione tale che $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. Siccome gli r_k sono ≥ 0 , basta scrivere il problema per $w_k = 1$. Siccome poi il problema è in forma generale, il suo duale è in forma standard, e si scrive

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 6x_2 - 4x_4 - 7x_5 \\ & -x_1 - x_3 = 0 \\ & x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ & x_2 - x_5 = 0 \\ & x_3 + x_6 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_4 + x_7 &= 1 \\x_5 + x_8 &= 1 \\x_1, \dots, x_8 &\geq 0\end{aligned}$$

La tabella del simplesso associata è:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
5	6	0	-4	-7	0	0	0	0
-1		-1						0
1	-1		-1					0
	1			-1				0
		1			1			1
			1			1		1
				1			1	1

e come si vede non è in forma canonica. E' tuttavia immediato osservare che

- le variabili x_6, x_7, x_8 corrispondono a colonne unitarie
- altre due colonne unitarie si possono ottenere sostituendo alla riga 2 la somma delle righe 2 e 3, e moltiplicando la riga 1 per -1 .

Dopo l'operazione (b) si ha quindi:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
5	6	0	-4	-7	0	0	0	0
1		1						0
			-1	-1				0
	1			-1				0
		1			1			1
			1			1		1
				1			1	1

La colonna unitaria mancante si può ora ottenere sostituendo alla riga 5 la somma delle righe 5 e 2, e poi moltiplicando la riga 2 per -1 :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
5	6	0	-4	-7	0	0	0	0
1		1						0
			1	1				0
	1			-1				0
		1			1			1
				-1		1		1
				1			1	1

Per giungere alla forma canonica basta ora sommare alla riga 0 le righe 1, 2, 3 moltiplicate rispettivamente per $-5, 4, -6$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	0	-5	0	3	0	0	0	0
1		1						0
			1	1				0
	1			-1				0
		1			1			1
				-1		1		1

				1			1	1
--	--	--	--	---	--	--	---	---

Questa soluzione, peraltro degenere, non è necessariamente ottima in quanto il costo ridotto della variabile x_5 è positivo. Operando un pivot in riga 2 e colonna 5 si ottiene la tabella

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	0	-5	-3	0	0	0	0	0
1		1						0
			1	1				0
	1		1					0
		1			1			1
			1			1		1
			-1				1	1

La soluzione ottenuta è ottima dal momento che tutti i costi ridotti sono non positivi. Il suo valore, che per la dualità forte corrisponde al valore di ogni soluzione ottima primale, è 0: dunque esiste effettivamente una soluzione primale che non fa arrivare treni in ritardo (in particolare basta scegliere $a_1 = -4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 7$).