RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**
prova scritta del 30 aprile 2008

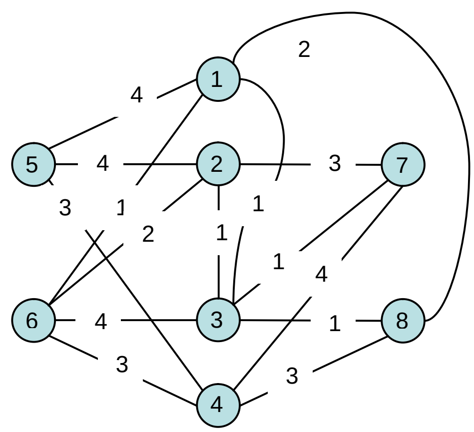
Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Matricola: |__|__|__|__|__|__|

Domanda 1
Dare la definizione di problema combinatorico e di problema di ottimizzazione combinatoria.

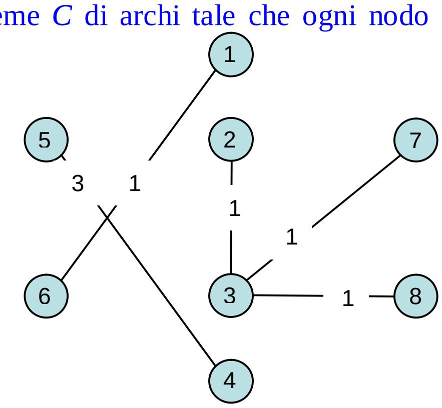
Un problema combinatorico è definito da una coppia $(U, \Im)$, dove U è un insieme finito e $\Im$ una famiglia di sottoinsiemi di U definita implicitamente tramite una predicato verificato da tutti e soli gli elementi di $\Im$. Il problema consiste nel dire se $\Im$ è vuota oppure no.
Un problema di ottimizzazione combinatoria aggiunge a questi elementi una funzione $c: U \rightarrow \mathbb{R}$, e, posto $c(X) = \sum_{u \in U} c(u)$, consiste nell'individuare, se esiste, un $X^* \in \Im$ tale che $c(X^*) \leq c(X)$ per ogni $X \in \Im$.

Domanda 2

1. Dare la definizione di edge-cover di un grafo.
2. Definire la coppia $(U, \Im)$ del problema combinatorico associato all'edge-cover di un grafo.
3. Dato il grafo G di figura illustrare e applicare l'algoritmo greedy per determinare un edge-cover di peso minimo rispetto alla funzione peso c: $E \rightarrow \mathbb{R}_+$ i cui valori sono rappresentati in figura..
4. La soluzione trovata è ottima?
5. In generale l'algoritmo greedy trova l'ottimo per il problema del minimo edge-cover? Motivare la risposta.



1. Un edge-cover di un grafo $G = (V, E)$ è un insieme C di archi tale che ogni nodo di V appartiene ad almeno un arco di C.
2. $U = E$, $\Im = \{X \subseteq E: \forall u \in V\ \exists uv \in X\}$
3. Iniziando da $C := E$, l'algoritmo greedy elimina archi da C in ordine di peso non crescente finché C conserva la proprietà di essere un edge-cover. In questo caso un run dell'algoritmo eliminerebbe nell'ordine gli archi 15, 25, 36, 47, 27, 46, 48, 18, 26, 13. La soluzione ottenuta ha peso 7 ed è ottima.



4. In generale, però, l'algoritmo greedy non è in grado di determinare una soluzione ottima.
Prendiamo il grafo ({1, 2, 3, 4}, {12, 13, 14, 23}) e supponiamo $c_{12} = c_{13} = c_{14} = 2$, $c_{23} = 3$. L'algoritmo greedy elimina dunque l'arco 23 e raggiunge un insieme minimale (albero ricoprente) di peso 6; tuttavia il matching perfetto {14, 23} è un edge-cover di peso 5.

Domanda 3

1. Definire la combinazione affine di un insieme di vettori.
2. Dire se il vettore $\mathbf{v} = (1, 1/3, -1/2)$ è una combinazione convessa dei vettori $\mathbf{u}_1 = (3, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 4, 2)$ e $\mathbf{u}_3 = (-2, 0, -3)$.

1. La combinazione affine di un insieme di m vettori è un vettore ottenuto combinandoli linearmente con coefficienti $l_1, \dots l_m$ che verificano la condizione $\sum l_i = 1$.
2. Il vettore $\mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ con coefficienti $l_1 = 7/15$, $l_2 = 1/5$, $l_3 = 3/10$. Poiché la somma dei coefficienti dà $29/30 < 1$, la combinazione è conica ma non convessa.

Domanda 4

1. Dare la definizione di matroide.
2. Dato un grafo $G = (V, E)$, due archi di E si dicono adiacenti se hanno un vertice comune. Siano $U = E$ l'insieme universo e $\Im$ la famiglia formata da tutti gli insiemi $X \subseteq U$ tali che per ogni arco $e \in X$ esiste un arco $e^* \in U - X$ adiacente a e.
   Dire se la coppia $(U, \Im)$ è un matroide oppure, in caso contrario, fornire un controesempio.

1. Una coppia $(U, \Im)$ con $\Im \subseteq 2^U$ è un matroide se verifica le condizioni (*i*) $\emptyset \in \Im$; (*ii*) $X \in \Im$, $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \Im$; (*iii*) $X, Y \in \Im$, $|X| < |Y| \Rightarrow \exists y \in Y - X$: $X \cup \{y\} \in \Im$.
2. $\Im$ non è subclusiva, basta prendere il grafo (sconnesso) $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{12, 34, 45\}) = P_2 \cup P_3$: chiaramente $\{12, 34\} \in \Im$ (perché 34 è adiacente a $45 \in U - X$), mentre $\{12\} \notin \Im$. Anche la proprietà di scambio in generale non è verificata: prendiamo il semplice grafo $P_4 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 23, 34\})$, $X = \{23\}$, $Y = \{12, 34\}$; evidentemente sia X che Y appartengono a $\Im$, tuttavia né $\{12, 23\}$ né $\{23, 34\}$ appartengono a $\Im$, poiché 12 non è adiacente a 34.

Domanda 5

Indicato con $A(e)$ l'insieme degli archi adiacenti a e, formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di determinare il più grande insieme X che soddisfi la proprietà descritta al punto 2 della domanda precedente.

Per ogni arco a definiamo una variabile binaria y_a in modo che $y_a = 1$ se e solo se $a \notin X$.
Ora, se a appartiene a X (quindi $y_a = 0$) deve esistere un b in $N(a) \cap (U - X)$: quindi la somma degli y_b in $A(a)$ deve dare almeno $1 = 1 - y_a$.
Se invece a non appartiene a X, la somma degli y_b in $A(a)$ può assumere un qualsiasi valore intero tra 0 e $|E|$.
Massimizzare il numero di elementi di X corrisponde a minimizzare il numero di elementi che non sono in X, quindi il problema si formula:

$$\begin{aligned} \min \quad & \textstyle\sum_{a \in E} y_a \\ & \textstyle\sum_{b \in A(a)} y_b \geq 1 - y_a && \text{per ogni } a \in E \\ & y_a \in \{0, 1\} && \text{per ogni } a \in E \end{aligned}$$