RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova parziale del 30 Aprile 2008

Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Matricola: |__|__|__|__|__|__|

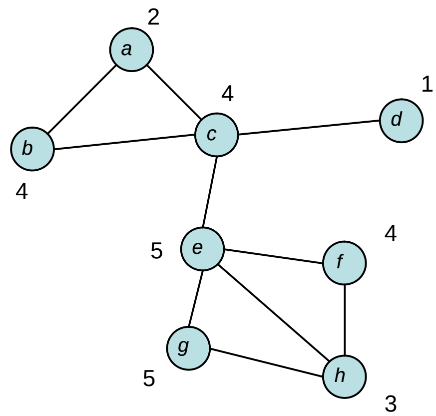
Domanda 1

Dare la definizione di problema combinatorico e di problema di ottimizzazione combinatoria.

Un problema combinatorico è definito da una coppia $(U, \Im)$, dove U è un insieme finito e $\Im$ una famiglia di sottoinsiemi di U definita implicitamente tramite una predicato verificato da tutti e soli gli elementi di $\Im$. Il problema consiste nel dire se $\Im$ è vuota oppure no.

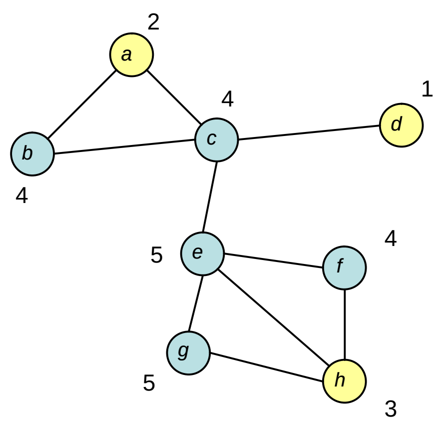
Un problema di ottimizzazione combinatoria aggiunge a questi elementi una funzione c: $U \to \mathrm{I\!R}$, e, posto $c(X) = \sum_{u \in U} c(u)$, consiste nell'individuare, se esiste, un $X^* \in \Im$ tale che $c(X^*) \leq c(X)$ per ogni $X \in \Im$.

Domanda 2



1. Dare la definizione di insieme dominante su un grafo.
2. Definire la coppia $(U, \Im)$ del problema combinatorico associato all'insieme dominante di un grafo.
3. Dato il seguente grafo G illustrare e applicare l'algoritmo greedy per determinare l'insieme dominante di peso minimo rispetto alla funzione peso c: $V \to \mathrm{I\!R}_+$ i cui valori sono rappresentati in figura.
4. La soluzione trovata è ottima?
5. In generale, l'algoritmo greedy determina un ottimo del problema dell'insieme dominante di peso minimo? Motivare la risposta.

1. Un insieme dominante è un insieme di vertici D tale che ogni $u \in V - D$ è adiacente ad almeno un elemento di D.
2. $U = V$, $\Im = \{X \subseteq U\text{: } \forall u \in V - D\ \exists v \in D\text{: } uv \in E\}$
3. Poiché l'insieme dominante è superclusivo occorre far ricorso a una codifica decrementale. Iniziando da $D := V$, l'algoritmo greedy elimina vertici da D in ordine di peso non crescente finché D conserva la proprietà di essere dominante. In questo caso un run dell'algoritmo eliminerebbe nell'ordine i vertici e, g, b, c, f. La soluzione ottenuta ha peso 6 ed è ottima.



4. In generale, però, l'algoritmo greedy non è in grado di determinare una soluzione ottima. Prendiamo il grafo $(\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 13, 14\})$ e supponiamo $c_2 = c_3 = c_4 = 1$, $c_1 = 2$. L'algoritmo greedy elimina dunque il vertice 1 e raggiunge un insieme minimale di peso 3; tuttavia l'insieme $\{1\}$ è dominante e ha peso 2.

Domanda 3

1. Definire la combinazione conica di un insieme di vettori.
2. Dire se il vettore $\mathbf{v} = (-5/2, 2/3, -2)$ è una combinazione conica dei vettori $\mathbf{u}_1 = (1/2, 0, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1/3, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 1/2)$.

1. La combinazione conica di un insieme di m vettori è un vettore ottenuto combinandoli linearmente con coefficienti $l_1, \dots l_m$ che verificano la condizione $l_i \geq 0$.
2. Il vettore $\mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ con coefficienti $l_1 = -1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 0$. La combinazione è affine, e poiché vi sono coefficienti negativi non è conica.

Domanda 4

1. Dare la definizione di matroide.
2. Dato un grafo $G = (V, E)$, siano $U = V$ l'insieme universo e $\Im$ la famiglia così definita:
   $\Im = \{X \subseteq U\colon\ X = \{u_1, \dots, u_m\}$ è un insieme stabile e per ogni $u_i \in X$ esiste un nodo $w \in V - X$ tale che $wu_{i+1} \in E$ ma $u_j w \notin E$ per qualsiasi $j < i\}$.
   Dire se la coppia $(U, \Im)$ è un matroide oppure, in caso contrario, fornire un controesempio.

1. Una coppia $(U, \Im)$ con $\Im \subseteq 2^U$ è un matroide se verifica le condizioni (i) $\emptyset \in \Im$; (ii) $X \in \Im$, $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \Im$; ($iii$) $X, Y \in \Im$, $|X| < |Y| \Rightarrow \exists y \in Y - X\colon X \cup \{y\} \in \Im$.
2. Sia X in $\Im$. Allora i nodi di X possono essere ordinati in modo che ciascuno, tranne eventualmente il primo, sia adiacente a un nodo distinto di $V - X$ (se così non fosse e due nodi di X avessero intorno coincidente si violerebbe la proprietà che definisce $\Im$). Questa proprietà si conserva evidentemente per ogni sottoinsieme di X, dunque $\Im$ è subclusiva Banalmente però non vale la proprietà di scambio: consideriamo il grafo $P_4 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 23, 34\})$, con $X = \{2\}$, $Y = \{1, 3\}$ entrambi appartenenti a $\Im$. Chiaramente nessun elemento di Y può aggiungersi a X, perché l'insieme risultante non sarebbe stabile.

Domanda 5

In un grafo G si definisce taglio un qualsiasi insieme degli archi minimale che interseca gli archi di ogni cammino di G. Formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di determinare il più piccolo insieme di archi di G che costituisca un taglio.

Il problema può formularsi in modi diversi. Il più diretto consiste nel passare per la definizione di (s, t)-taglio, vale a dire un taglio che separa due nodi specificati s e t. Definendo il vettore caratteristico $\mathbf{x}$ di un taglio di $G = (V, E)$ attraverso variabili $x_{uv} \in \{0, 1\}$ definite per ogni $uv \in E$, per definizione almeno una variabile x_{uv} dovrà valere 1 per gli uv appartenenti a qualsiasi cammino P di G che abbia s come primo nodo e t come ultimo nodo (s, t)-cammino. Il problema quindi si formula

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \textstyle\sum_{uv \in E} x_{uv} \\
& \textstyle\sum_{uv \in P} x_{uv} \geq 1 \text{ per ogni } P \subseteq E \text{ che costituisce un } (s, t)\text{-cammino di } G \\
& \qquad x_{uv} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

A questo punto, il minimo taglio si calcola scegliendo il minimo tra gli (s, t)-tagli di G al variare di s e t in tutti i modi possibili.