RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 16 febbraio 2006

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Una risposta esatta vale 2 punti, una sbagliata vale –1 punto.

1. Siano U un insieme finito, $A_1, \ldots, A_k$ una sua partizione e $a_1, \ldots, a_k$ dei numeri reali positivi. Si indichi con $\Im$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U tali che $|X \cap A_i| \leq a_i$ $\forall i = 1, \ldots, k$. La coppia $(U, \Im)$

(A) è un matroide

Siano $X \in \Im$, $Y \subseteq X$. Evidentemente $|X \cap A_i| \leq a_i$ implica $|Y \cap A_i| \leq a_i$, dunque $\Im$ è subclusiva.

Siano ora $X, Y \in \Im$ con $|X| = \sum_{i=1..k} |X \cap A_i| < \sum_{i=1..k} |Y \cap A_i| = |Y|$. Da questa diseguaglianza deduciamo che non può aversi $|X \cap A_i| \geq |Y \cap A_i|$ per ogni i, dunque deve esistere un indice j per il quale $|X \cap A_j| < |Y \cap A_j|$. In altri termini, A_j contiene un elemento di Y che non appartiene a X né, trattandosi di una partizione, ad alcuno degli altri A_i. Quindi $|(X \cup \{y\}) \cap A_i| = |X \cap A_i| \leq a_i$ per $i \neq j$, e poiché $|X \cap A_j| < |Y \cap A_j| < a_j$, si ha anche $|(X \cup \{y\}) \cap A_j| \leq a_j$. Si può quindi concludere che vale sempre la proprietà di scambio.

(B) non è un matroide ma è in generale subclusiva

(C) gode della proprietà di scambio pur non essendo subclusiva

2. Se un grafo simmetrico $G = (V, E)$ è un albero binario con più di un vertice allora ammette un vertice di grado 2, e tutti gli altri vertici hanno grado < 4. Il numero di vertici di grado 3

(A) è sempre pari

(B) è sempre pari se e solo se G è bilanciato

(C) è uguale al numero di vertici di grado 1

Giustificare la risposta.

G è un albero bilanciato con più di un vertice se

(*i*) è isomorfo a P_3, oppure

(*ii*) i due alberi G_1 e G_2 che si ottengono sconnettendo G mediante la rimozione del vertice di grado 2 sono a loro volta bilanciati (eventualmente riducendosi a un singolo vertice ciascuno).

Nel caso (*i*) G non contiene vertici di grado 3. Nel caso (*ii*), G_1 e G_2 sono necessariamente isomorfi e contengono dunque il medesimo numero di vertici di grado 3: quindi in G tale numero è senz'altro pari. Viceversa, se G non è bilanciato può ammettere un numero dispari di foglie e dunque di vertici di grado 3 (ricordiamo che in un grafo simmetrico i vertici di grado dispari sono sempre in numero pari). Ovviamente neanche la risposta (C) è corretta, in quanto P_3 (che è un albero binario con 3 vertici) contiene 2 vertici di grado 1 e 0 di grado 3.

3. I vettori (3, 5, 0), (2, 0, –1), (–1, 2, 1) sono

(A) linearmente dipendenti

(B) linearmente indipendenti

(C) affinemente indipendenti ma linearmente dipendenti

Il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} 3l_1 + 2l_2 &= 0 \\ 2l_1 - l_3 &= 0 \\ -l_1 + 2l_2 + l_3 &= 0 \end{aligned}$$

ammette solo la soluzione banale $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, in quanto il determinante dei suoi coefficienti è diverso da 0. I tre vettori sono dunque linearmente (e di conseguenza affinemente) indipendenti.

Risolvere il seguente esercizio. La soluzione viene valutata fino a 5 punti.

4. Quesito con la Susi

Ricavando opportune (dis)equazioni dalle situazioni illustrate nelle tre vignette, risolvete il problema con il metodo di Fourier-Motzkin, chiedendovi se quattro cilindri pesano almeno quanto due piramidi e cinque sfere.

Indicando rispettivamente con s, c, p il peso (incognito) di una sfera, un cilindro, una piramide, dalla prima vignetta si ricava $5s = 2c + p$, dalla seconda $2s + c = 3p$. Tenendo presente ora la terza vignetta, chiediamoci se quattro cilindri pesano almeno quanto due piramidi e cinque sfere, cioè se $4c \geq 5s + 2p$. Se così fosse, dovrebbero esistere valori positivi di s, c e p che verifichino il sistema:

$$\begin{aligned}
5s - 2c - p &\leq 0 \\
-5s + 2c + p &\leq 0 \\
2s + c - 3p &\leq 0 \\
-2s - c + 3p &\leq 0 \\
5s - 4c + 2p &\leq 0
\end{aligned}$$

Applichiamo il metodo di Fourier-Motzkin:

s	c	p	$\leq$
5	–2	–1	0
–5	2	1	0
2	1	–3	0
–2	–1	3	0
5	–4	2	0

$\rightarrow$

s	c	p	$\leq$
0	0	0	0
0	–9	13	0
0	9	–13	0
0	0	0	0
0	–2	3	0
0	–13	19	0

$\rightarrow$

s	c	p	$\leq$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	2	0

Siccome per soddisfare il sistema dovrebbe aversi $p \leq 0$, non esiste una soluzione con tutte e tre le componenti positive: se ne deduce che il piatto contenente i quattro cilindri pesa meno di quello contenente le due piramidi e le cinque sfere.