RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 17 febbraio 2005

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Una risposta esatta vale 2 punti, una sbagliata vale –1 punto.

1. Siano $U = [1, 2, \ldots, p, \ldots, n]$ un intervallo discreto e $\Im$ la famiglia di tutti gli intervalli discreti (*i*) contenuti in U, (*ii*) che contengono p, (*iii*) che non hanno più di k elementi. La coppia $(U, \Im)$

(A) è un matroide

(B) non è un matroide ma è in generale subclusiva

(C) gode della proprietà di scambio pur non essendo subclusiva

Siano $X \in \Im$, $Y \subseteq X$. Effettivamente $|Y| \leq k$, tuttavia in generale $Y \notin \Im$. Infatti Y potrebbe non essere un intervallo discreto (ad esempio $X = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$, $Y = \{1, 3, \ldots, p\}$), ovvero non contenere p (ad esempio $Y = \varnothing$). Dunque $\Im$ non è subclusiva.

Siano ora $X = [a, a+1, \ldots, p, \ldots, b] \in \Im$, $Y = [c, c+1, \ldots, p, \ldots, d] \in \Im$, con $b - a < d - c \leq k$. Chiaramente per ogni $y \in Y - X$ si ha $|X \cup \{y\}| = b - a + 1 \leq k$, quindi $X \cup \{y\}$ rispetta la (*iii*). Inoltre $p \in X$ implica $p \in X \cup \{y\}$, quindi $X \cup \{y\}$ rispetta la (*ii*). Infine, siccome $|X| < |Y|$ e $p \in X \cap Y$, esiste certamente un $y \in Y - X$ che precede a oppure segue b. Quindi $X \cup \{y\}$ rispetta anche la (*i*) e si può concludere che vale sempre la proprietà di scambio.

2. Sia $G = (V, E)$ un grafo 2-regolare. Allora l'insieme dei suoi archi E

(A) ammette sempre una 2-partizione $\{M_1, M_2\}$ in matching

(B) può non ammettere una 2-partizione $\{M_1, M_2\}$ in matching

(C) non ammette mai una 2-partizione $\{M_1, M_2\}$ in matching

Giustificare la risposta.

C_{2n} ammette evidentemente una partizione in 2 matching, ma altrettanto evidentemente C_{2n+1} non la ammette.

3. I vettori (1, 0, –2), (–1, 2, 1), (2, –2, 0) sono

(A) affinemente dipendenti

(B) linearmente dipendenti

(C) affinemente indipendenti

Infatti applicando la definizione di dipendenza lineare si vede subito che il sistema omogeneo

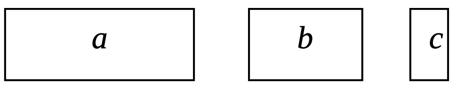
$$\begin{aligned} l_1 - l_2 + 2l_3 &= 0 \\ 2l_2 - 2l_3 &= 0 \\ -2l_1 + l_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

avendo determinante dei coefficienti diverso da zero ammette la sola soluzione banale $l_1 = l_2 = l_3 = 0$. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti, e non possono che essere anche affinemente indipendenti.

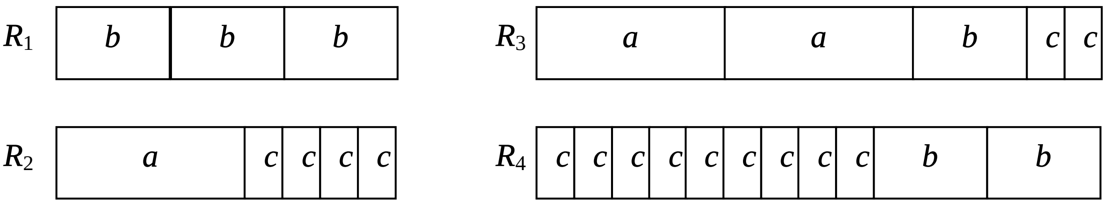
Risolvere il seguente esercizio. La soluzione viene valutata fino a 5 punti.

4. **Quesito senza la Susi**

Si supponga di avere a disposizione rettangoli di tre diverse lunghezze (a, b e c).



Componendo a, b e c è possibile ottenere rettangoli di lunghezza maggiore. Sapendo che il rettangolo R_1 (rispettivamente R_3) ha la stessa lunghezza del rettangolo R_2 (rispettivamente R_4)



dire se è possibile ottenere un rettangolo lungo almeno 28 cm componendo due rettangoli di tipo *a*, quattro rettangoli di tipo *b* e otto rettangoli di tipo *c*. Ricavando opportune (dis)equazioni dalle relazioni illustrate, si risolva il quesito con il metodo di Fourier-Motzkin.

Si indichi con *a*, *b*, *c* la lunghezza della base dei tre tipi di rettangolo. Se è possibile ricavare un rettangolo di almeno 28 cm dalla combinazione di rettangoli descritta deve aversi

$$2a + 4b + 8c \geq 28$$

Inoltre dalla figura si ricavano le equazioni

$3b = a + 4c$ cioè $a - 3b + 4c = 0$

$2a + b + 2c = 2b + 9c$ cioè $2a - b - 7c = 0$

Quindi la composizione in questione è possibile se esistono valori di $a, b, c > 0$ che soddisfano il sistema di disequazioni

$$\begin{aligned} 2a + 4b + 8c &\geq 28 \\ a - 3b + 4c &\geq 0 \\ -a + 3b - 4c &\geq 0 \\ 2a - b - 7c &\geq 0 \\ -2a + b + 7c &\geq 0 \end{aligned}$$

Applicando il metodo di Fourier-Motzkin si vede con facilità che tali valori effettivamente esistono.