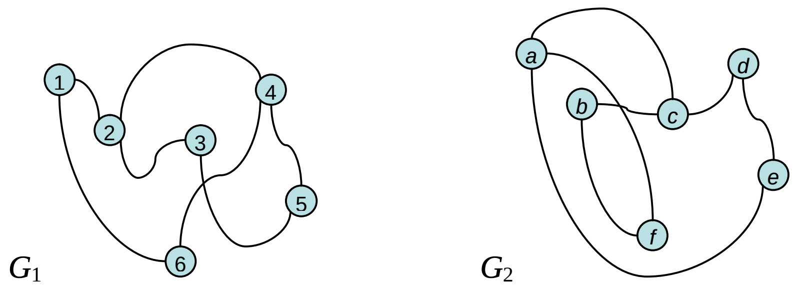
RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**
prova scritta del 22 settembre 2004 **FOGLIO 1**

Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Matricola: |__|__|__|__|__|__|

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).
Una risposta esatta vale 2 punti, una risposta sbagliata vale –1 punto.

1. Sia U un insieme discreto e finito, $M = (U, \Im)$ un matroide e sia $S \subseteq U$ scelto arbitrariamente. Definiamo $M' = (U - S, \Im')$, con $\Im' = \{I' \in \Im : I' \subseteq U - S\}$. La famiglia $\Im'$
(A) non è subclusiva
(B) è subclusiva ma non è un matroide
(C) è un matroide

2. Relativamente ai grafi sotto riportati, quale delle seguenti affermazioni è vera?



(A) G_1 e G_2 non sono isomorfi
(B) G_1 e G_2 sono isomorfi
(C) G_1 è isomorfo a G_2 ma G_2 non è isomorfo a G_1

3. Il duale del problema

$$\begin{array}{ll} \min & 7x_1 - 3x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_2 + 3x_3 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

è il problema:

(A) $$\begin{array}{ll} \max & (2y_1 + y_2) \\ & y_1 - y_2 \leq 7 \\ & 2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ & 3y_1 + 3y_3 = -3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

(B) $$\begin{array}{ll} \min & (2y_1 + y_2) \\ & y_1 - y_2 \geq 7 \\ & 2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ & 3y_1 + 3y_3 = -3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

(C) $$\begin{array}{ll} \min & (2y_1 - y_2) \\ & y_1 - y_2 = 7 \\ & 2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ & 3y_1 + y_2 + 3y_3 = -3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

4. Sia dato il problema

$$P: \quad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Si supponga che $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{yA} > \mathbf{c}$. Allora:
(A) P è illimitato o non ammette soluzione
(B) P ammette un'unica soluzione ottima
(C) P ammette soluzione ottima, non necessariamente unica

RICERCA OPERATIVA — **GRUPPO B**
prova scritta del 22 settembre 2004 — **FOGLIO 2**

Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Matricola: |__|__|__|__|__|__|

Risolvere i seguenti esercizi. La soluzione di ogni esercizio viene valutata fino a 5 punti.

1. Avventure di un professore

Il professor Birba ama giocare a carte. Essendo un valente matematico quando mischia un mazzo non può fare a meno di pensare che sta operando un assegnamento di carte a posizioni, in cui la carta i-esima del mazzo viene spostata nella posizione j-esima, per $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$. Può quindi associare a ogni coppia (carta, posizione) una variabile $x_{ij} \in \{0, 1\}$ che viene posta a 1 se e solo se la carta i-esima è riposizionata al posto j. Ricordando che per mischiare le carte uno prima divide il mazzo in due mazzetti N_1 e N_2 ($|N_1| + |N_2| = n$), e che le carte di N_t ($t = 1, 2$) dopo la mischiata conservano nel mazzo l'ordine reciproco che avevano in N_t, a quali vincoli devono essere assoggettate le variabili x_{ij} perché rappresentino un modo corretto di mischiare le carte? (Riportare tali vincoli nello spazio qui sotto)

Vincoli:

$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n \qquad$ (ogni posizione deve essere occupata da una carta)

$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad$ (ogni carta deve essere assegnata a una posizione)

$x_{ij} + x_{hk} \le 1 \qquad i, h \in N_t,\ i < h,\ j > k,\ t = 1, 2$

(nel mazzo mischiato le carte di N_t devono mantenere lo stesso ordine che avevano in N_t)

2. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, stabilire se i due politopi

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 4 \\ 1 \le x_1 &\le 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 5 \\ 0 \le x_3 &\le 1 \end{aligned}$$

sono o *non sono* equivalenti (sottolineare la risposta ritenuta esatta; si ricorda che due politopi sono equivalenti se e solo se ammettono lo stesso insieme di punti estremi).

Troviamo i punti estremi del primo politopo:

x_1	x_2	x_3	$\le$
1	4	–1	0
–1	–4	1	0
1	0	–1	4
–1	0	1	–4
1	0	0	4
–1	0	0	–1

Tabella 1A

x_1	x_3	$\le$
1	–1	4
–1	1	–4
1	0	4
–1	0	–1

Tabella 2A

x_1	$\le$
1	4
–1	–1

Tabella 3A

Quindi $1 \le x_1 \le 4$.
Procedendo all'indietro e sostituendo i valori fissati si ottiene:

1. Si fissa $x_1 = 1$ nella Tabella 3A
   a. Sostituendo $x_1 = 1$ nella Tabella 2A si ottiene $x_3 = -3$

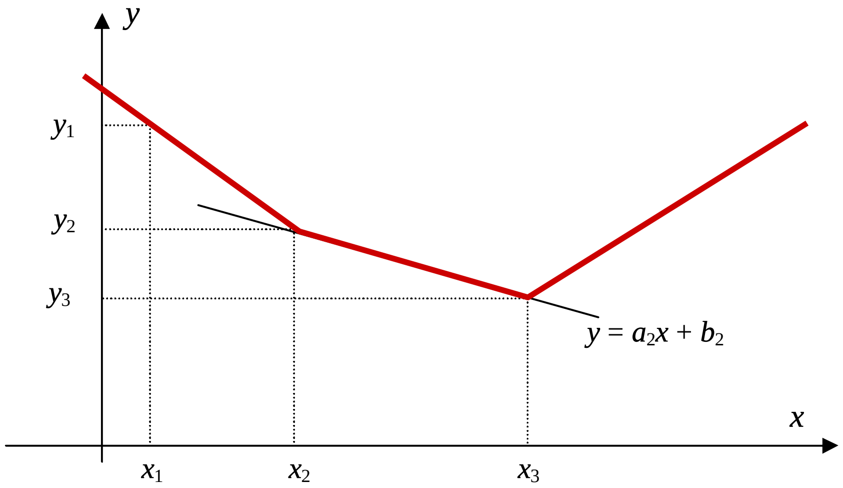
Si nota che nel secondo politopo esiste il vincolo $x_3 \ge 0$, pertanto si può concludere che i due politopi *non sono equivalenti.*

3. In curva al minimo

Si consideri una curva di $\mathbb{R}^2$ della forma $y = f(x)$ e, per $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, sia $f(x_k) = y_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Tale curva può essere interpolata tramite le $n - 1$ rette di equazione $y = a_k x + b_k$ che passano per i punti (x_k, y_k) e (x_{k+1}, y_{k+1}), con

$$a_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \qquad b_k = y_k - \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} x_k$$

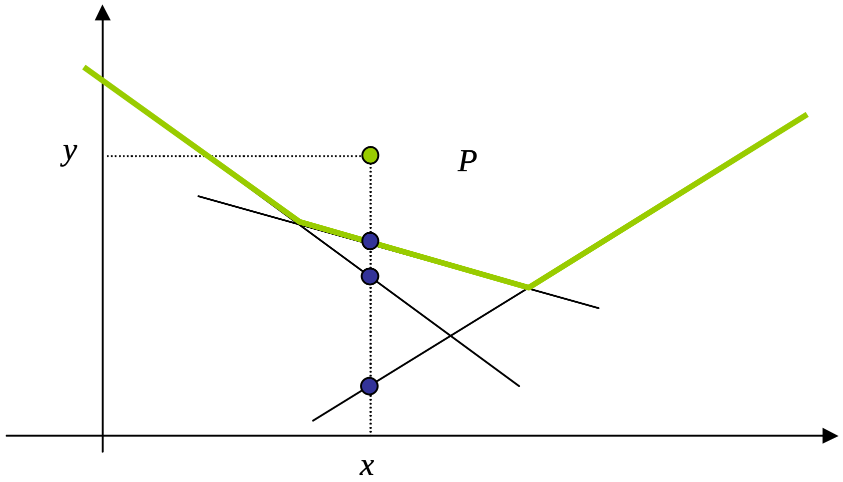
per $k = 1, \ldots, n - 1$ (vedi figura).



Supponiamo di voler ricavare, a partire dalla conoscenza di a_k e b_k, il valore minimo y^* assunto dalla spezzata che interpola la curva nel caso in cui nessuno dei punti (x_k, y_k) risulti noto. Come ulteriore informazione sappiamo che $f(x)$ (e quindi la sua interpolazione) è una funzione convessa della variabile x.
Formulare il problema in termini di programmazione lineare e, senza ricavare esplicitamente le coordinate (x_k, y_k), determinare il valore y^* della soluzione ottima per:

$n = 4$, $a_1 = -2$, $b_1 = 6$
$a_2 = -1$, $b_2 = 5$
$a_3 = 2$, $b_3 = 2$

Poiché $f(x)$ è convessa, lo è anche la spezzata individuata dalle tre rette. Perciò l'insieme dei punti (x, y) con ordinata non inferiore a quella dei punti delle tre rette aventi ascissa x costituisce un poliedro P di $\mathbb{R}^2$ (vedi figura).



Il problema consiste nel determinare il punto di questo poliedro avente ordinata y minima. Tale problema si scrive:

P) min y

$$y \geq a_k x + b_k \qquad k = 1, \ldots, 3$$

Nel caso esaminato si ha in particolare

P) min y

$$\begin{aligned} y + 2x &\geq 6 \\ y + x &\geq 5 \\ y - 2x &\geq 2 \end{aligned}$$

Il duale di (P) assume la forma (standard)

D) max $6z_1 + 5z_2 + 2z_3$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 1 \\ 2z_1 + z_2 - 2z_3 &= 0 \\ z_1, z_2, z_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Questo problema è equivalente al seguente, ottenuto sostituendo al secondo vincolo di eguaglianza la somma dei primi due:

D) max $6z_1 + 5z_2 + 2z_3$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 1 \\ 3z_1 + 2z_2 &= 1 \\ z_1, z_2, z_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Per ottenere una forma canonica per (D) si può ora risolvere con il metodo del simplesso il problema ausiliario

A) min w

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 1 \\ 3z_1 + 2z_2 + w &= 1 \\ z_1, z_2, z_3, w &\geq 0 \end{aligned}$$

z_1	z_2	z_3	w	
0	0	0	1	0
1	1	1	0	1
3	2	0	1	1

Tabella iniziale del problema ausiliario (A).

z_1	z_2	z_3	w	
-3	-2	0	0	-1
1	1	1	0	1
3	2	0	1	1

Tabella canonica del problema (A), prima base ed elemento di pivot.

z_1	z_2	z_3	w	
0	0	0	1	0
0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Tabella canonica del problema (A), seconda base (ottima).

z_1	z_2	z_3	
6	5	2	0
0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

Tabella iniziale del problema (D) ottenuta eliminando la colonna w e sostituendo la funzione obiettivo.

z_1	z_2	z_3	
0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
1	**$\frac{2}{3}$**	0	$\frac{1}{3}$

Tabella canonica del problema (D), prima base ed elemento di pivot.

z_1	z_2	z_3	
$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{7}{2}$
$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$

Tabella canonica del problema (D), seconda base (ottima).

Per il teorema della dualità forte, i problemi (P) e (D) ammettono entrambi ottimo finito, e i valori delle due soluzioni coincidono. Pertanto il minimo dell'interpolazione di $f(x)$ data dalle tre rette vale $y^* = \frac{7}{2}$.