RICERCA OPERATIVA — **GRUPPO A**
prova scritta del 22 settembre 2004 — **FOGLIO 1**

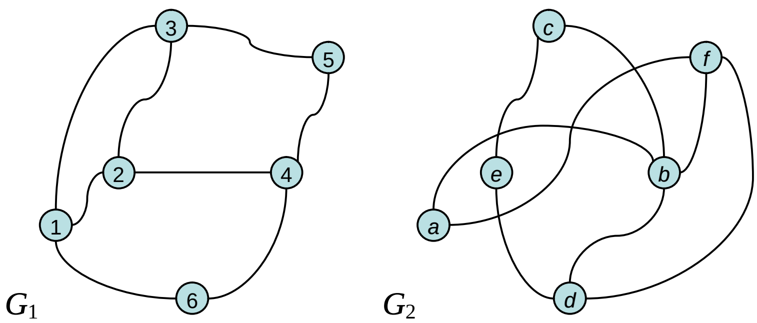
Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Matricola: |__|__|__|__|__|__|

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).
Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale –1 punto.

1. Sia U un insieme di n elementi e, per k e p fissati con $k, p \le n$, $\Im_{kp}$ contenga tutti i sottoinsiemi di U composti da almeno k e al più p elementi. In funzione del parametro k, la famiglia $\Im_{kp}$

(A) non è subclusiva per qualsiasi valore di k
(B) è subclusiva per k = _________ ma non definisce un matroide
(C) definisce un matroide per $k = 0$

2. Relativamente ai grafi sotto riportati, quale delle seguenti affermazioni è vera?



(A) G_1 e G_2 non sono isomorfi
(B) G_1 è isomorfo a G_2 ma G_2 non è isomorfo a G_1
(C) G_1 e G_2 sono isomorfi

3. Il duale del problema

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - x_2 - 3x_3 \\ & x_2 + x_3 \le -1 \\ & -x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

è il problema

(A)
$$\begin{array}{rl} \min & -y_1 + y_2 \\ & -y_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 \ge -1 \\ & y_1 \ge -3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

(B)
$$\begin{array}{rl} \min & -y_1 + y_2 \\ & -y_2 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 \ge -1 \\ & y_1 \ge -3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

(C)
$$\begin{array}{rl} \min & -y_1 + y_2 \\ & y_2 = -1 \\ & y_1 - y_2 \ge -1 \\ & y_1 \ge -3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

4. Sia dato il problema

$$P: \quad \begin{array}{rl} \min & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

Si supponga che $\exists!\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{yA} \le \mathbf{c}$, con $\mathbf{y} = (-1, \ldots, 0, 0)$. Allora:

(A) P è illimitato
(B) P ammette una soluzione ottima
(B) P non ammette soluzione

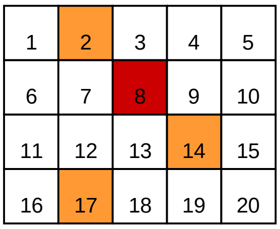
RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**
prova scritta del 22 settembre 2004 **FOGLIO 2**

Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
Matricola: |__|__|__|__|__|__|

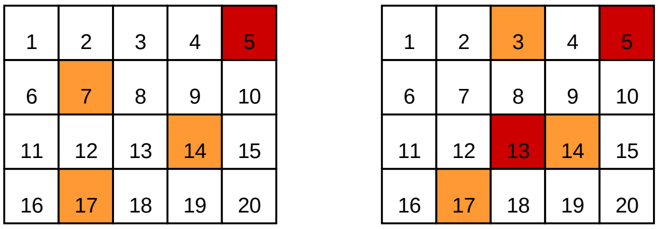
Risolvere i seguenti esercizi. La soluzione di ogni esercizio viene valutata fino a 5 punti.

1. Avventure di un professore

Il professor Birba, valente matematico e tifoso del Messina, ha deciso di rifare il pavimento della cucina usando piastrelle dei colori sociali della sua squadra del cuore (giallo e rosso). La signora Birba però, giudicando l'accostamento un po' vistoso, gli chiede di intercalare le piastrelle colorate con altre bianche in modo che coppie di piastrelle gialle (rosse) distino almeno 3 piastrelle l'una dall'altra, mentre una piastrella gialla e una rossa distino tra loro almeno 2 piastrelle (definiamo distanza $d(u, v)$ tra due qualsiasi piastrelle u e v del pavimento P come il minimo numero di piastrelle adiacenti in orizzontale o verticale che occorre toccare per passare da u a v, vedi figura). Il professore non ha difficoltà a soddisfare il desiderio di sua moglie, ma cerca di massimizzare il numero di piastrelle colorate formulando un problema di programmazione lineare 0-1. Sapreste dire quale? (riportare la formulazione nel riquadro)



Disposizione ammessa dalla signora Birba.



Disposizioni non ammesse dalla signora Birba.

Variabili di decisione

$x_u = 1$ se la piastrella u è gialla, $x_u = 0$ altrimenti ($u \in P$)
$y_u = 1$ se la piastrella u è rossa, $y_u = 0$ altrimenti ($u \in P$)

Vincoli

$x_u + y_u \leq 1$, per $u \in P$ (una piastrella non ha più di un colore)
$x_u + y_v \leq 1$, per $d(u, v) < 2$ (piastrelle a distanza inferiore a 2 non possono essere entrambe colorate)

$x_u + x_v \leq 1$
$y_u + y_v \leq 1$, per $d(u, v) < 3$ (piastrelle a distanza inferiore a 3 non possono avere medesimo colore)

$x_u, y_u \in \{0, 1\}$, per $u \in P$

Obiettivo

$\max \sum_{u \in P} (x_u + y_u)$ (numero di piastrelle colorate)

2. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, dire se i due politopi

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 & \qquad & 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 2 & & x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2 \\ -1 \le x_2 \le 0 & & 1 \le x_1 \le 4 \end{array}$$

sono o *non sono* equivalenti (sottolineare la risposta ritenuta esatta; si ricorda che due politopi sono equivalenti se e solo se ammettono lo stesso insieme di punti estremi).

Troviamo i punti estremi del primo politopo:

x_1	x_2	x_3	$\le$
1	4	–1	0
–1	–4	1	0
1	2	1	2
–1	–2	–1	–2
0	1	0	0
0	–1	0	1

Tabella 1A

x_2	x_3	$\le$
2	–2	–2
–2	2	2
1	0	0
–1	0	1

Tabella 2A

x_2	$\le$
1	0
–1	1

Tabella 3A

Quindi $-1 \le x_2 \le 0$. Procedendo all'indietro e sostituendo i valori fissati si ottiene:

1. Si fissa $x_2 = -1$ nella Tabella 3A
   a. Sostituendo $x_2 = -1$ nella tab. 2A si ottiene $x_3 = 0$
   b. Sostituendo i valori ottenuti ai passi precedenti in Tabella 1A si ottiene $x_1 = 4$

2. Pertanto un punto estremo del politopo in tab. 1A è (4, –1, 0)

3. Si fissa $x_2 = 0$ nella Tabella 3A
   a. Sostituendo $x_2 = 0$ nella Tabella 2A si ottiene $x_3 = 1$
   b. Sostituendo i valori ottenuti ai passi precedenti in Tabella 1A si ottiene $x_1 = 1$

4. Pertanto un altro (l'ultimo) punto estremo del politopo in tab. 1A è (1, 0, 1)

Il politopo in Tabella 1 ha dunque due punti estremi: (4, –1, 0) e (1, 0, 1).
Procediamo in modo analogo per il secondo politopo:

x_1	x_2	x_3	$\le$
2	7	–1	1
–2	–7	1	–1
1	6	–3	–2
–1	–6	3	2
1	0	0	4
–1	0	0	–1

Tabella 1B

x_1	x_2	$\le$
1	3	1
–1	–3	–1
1	0	4
–1	0	–1

Tabella 2B

x_1	$\leq$
1	4
–1	–1

Tabella 3B

Quindi $1 \leq x_1 \leq 4$. Procedendo all'indietro e sostituendo i valori fissati si ottiene:

5. Si fissa $x_1 = 1$ nella Tabella 3B
   a. Sostituendo $x_1 = 1$ nella Tabella 2B si ottiene $x_2 = 0$
   b. Sostituendo i valori ottenuti ai passi precedenti in Tabella 1B si ottiene $x_3 = 1$

6. Pertanto un punto estremo del politopo in tab. 1B è (1, 0, 1)

7. Si fissa $x_1 = 4$ nella Tabella 3B
   a. Sostituendo $x_1 = 4$ nella Tabella 2B si ottiene $x_2 = -1$
   b. Sostituendo i valori ottenuti ai passi precedenti in Tabella 1B si ottiene $x_3 = 0$

8. Pertanto un altro (l'ultimo) punto estremo del politopo in Tabella 1B è (4, –1, 0)

Il politopo in Tabella 1B ha dunque due punti estremi: (4, –1, 0) e (1, 0, 1)
Si può concludere pertanto che i politopi in tab. 1A e 1B *sono equivalenti* in quanto hanno punti estremi coincidenti.

3. OK, il prezzo è giusto

Una grande impresa gestisce due processi industriali (A e B) che condividono due risorse (R1 e R2). All'inizio di un periodo di pianificazione *T* della durata di un anno il magazzino dispone di 8 (di 6) tonnellate di risorsa R1 (di risorsa R2). Il management dell'impresa deve decidere le frazioni del periodo da dedicare al primo e al secondo processo. Questa scelta deve essere fatta tenendo conto che se operativo per l'intero anno, il processo A (il processo B):

- consumerebbe 2 tonnellate (5 tonnellate) di R1 e 4 tonnellate (3 tonnellate) di R2;
- renderebbe un profitto di 300.000 € (di 200.000 €).

Ad esempio, una scelta possibile sarebbe dedicare ⅓ dell'anno al processo A e i rimanenti ⅔ al processo B: in tal caso il processo A (il processo B) consumerebbe ⅔ di tonnellata ($^{10}/_{3}$ di tonnellata) di R1 e $^{4}/_{3}$ di tonnellata (2 tonnellate) di R2, e il profitto complessivo sarebbe pari a ⅓ 300.000 + ⅔ 200.000 = 233.333,33 €.
Per poter avere un quadro completo della situazione, il management vorrebbe conoscere il valore marginale delle risorse disponibili in magazzino, vale a dire a quale prezzo massimo (prezzo implicito) sarebbe conveniente acquistarne per tentare di migliorare il profitto conseguito nell'intero periodo di pianificazione. Sapreste aiutarlo? Una volta risolto tale problema, e senza applicare il simplesso, sapreste calcolare la frazione ottimale di periodo da dedicare a ciascuno dei processi?

Prezzo implicito di R1 = 0 di R2 = 0 Frazione di *T* dedicata ad A = 1 a B = 0

Dette *a* e *b* le frazioni di periodo da dedicare ai processi A e B, il problema di massimizzare il profitto complessivo si formula

P) max $3a + 2b$
$2a + 5b \leq 8$ → (vincolo sulla disponibilità di R1)
$4a + 3b \leq 6$ → (vincolo sulla disponibilità di R2)
$a + b = 1$
$a, b \geq 0$ → (*a* e *b* sono frazioni dell'unità)

Per calcolare i prezzi impliciti y_1^*, y_2^* di R1, R2 occorre risolvere il duale di (P):

D) min $8y_1 + 6y_2 + y_3$
$2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3$
$5y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2$
$y_1, y_2 \geq 0$

dove y_3, non vincolata in segno, è la variabile duale associata al vincoli di eguaglianza. Per portare tale problema in forma standard occorre sostituire y_3 con $(y_{31} - y_{32})$ e aggiungere due variabili di surplus z_1, z_2 (le nuove variabili introdotte sono tutte vincolate in segno):

$$
\text{D)} \quad \min \quad 8y_1 + 6y_2 + y_{31} - y_{32}
$$
$$
\begin{aligned}
2y_1 + 4y_2 + y_{31} - y_{32} - z_1 &= 3 \\
5y_1 + 3y_2 + y_{31} - y_{32} - z_2 &= 2 \\
y_1, y_2, y_{31}, y_{32}, z_1, z_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Il problema non è in forma canonica. Tuttavia una prima base, formata da y_{31} e z_2, è immediatamente ottenibile sostituendo il secondo vincolo con la differenza tra il primo e il secondo:

$$
\text{D)} \quad \min \quad 8y_1 + 6y_2 + y_{31} - y_{32}
$$
$$
\begin{aligned}
2y_1 + 4y_2 + y_{31} - y_{32} - z_1 \qquad &= 3 \\
-3y_1 + y_2 \qquad - z_1 + z_2 &= 1 \\
y_1, y_2, y_{31}, y_{32}, z_1, z_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

y_1	y_2	y_{31}	y_{32}	z_1	z_2	
8	6	1	–1	0	0	0
2	4	1	–1	–1	0	3
–3	1	0	0	–1	1	1

Tabella iniziale del problema (D).

y_1	y_2	y_{31}	y_{32}	z_1	z_2	
6	2	0	0	1	0	–3
2	4	1	–1	–1	0	3
–3	1	0	0	–1	1	1

Tabella canonica del problema (D), prima base (ottima).

Poiché sia y_1 che y_2 risultano fuori base nella tabella ottima, si ha $y_1^* = y_2^* = 0$, cioè entrambe le risorse in magazzino sono sovrabbondanti per la produzione prevista, e quindi non è conveniente acquistarne ulteriori quantitativi.

Per quanto riguarda il calcolo della frazione ottimale di periodo da dedicare ai due processi, avendosi

$$
y_{31}^* - y_{32}^* = y_3^* = 3
$$

il primo vincolo duale è soddisfatto con il segno “=”, mentre il secondo con il segno “>”. Quest’ultimo corrisponde alla variabile primale b, che di conseguenza all’ottimo di (P) assume valore $b^* = 0$. Considerato il terzo vincolo primale, si ha perciò $a^* = 1$: vale a dire, la soluzione migliore consiste nell’attivare il processo A (e quindi disattivare il processo B) per l’intera durata del periodo.