RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**

prova scritta del 23 Settembre 2008

1. Data una partizione di un insieme U in m sottoinsiemi $B_1, \ldots, B_m$ ($U = B_1 \cup \ldots \cup B_m$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ $\forall\ i \neq j$) e dati m numeri naturali $d_1, \ldots, d_m \in \boldsymbol{N}$, si consideri la famiglia $\Im$ di sottoinsiemi di U così definita: $\Im = \{X \subseteq U\colon |X \cap B_i| \geq d_i\ \ i = 1, \ldots, m\}$. La coppia $(U, \Im)$ è un matroide? Giustificare la risposta oppure fornire un controesempio.

Pur godendo della proprietà di scambio, la coppia considerata non è un matroide in quanto non è subclusiva: infatti sia $U = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B_1 = \{a_1\}$, $B_2 = \{a_2, a_3\}$, $d_i = 1$, $i = 1, 2$. Certamente $X=\{a_1,a_2\}$ è membro della famiglia, ma nessun suo sottoinsieme lo è.

2. Il duale D del problema P)

$$
\begin{array}{rl}
\max & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\
& x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 1 \\
& x_2 + 5x_3 = 9 \\
& -3x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\
& x_2, x_3 \geq 0 \\
& x_1 \leq 0
\end{array}
$$

[A]
$$
\begin{array}{rl}
\max & -y_1 - 9y_2 + 6y_3 \\
& -y_1 + 3y_3 \geq -2 \\
& 5y_1 + y_2 + y_3 \geq -3 \\
& -3y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 1 \\
& y_1, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

[B]
$$
\begin{array}{rl}
\min & y_1 + 9y_2 - 6y_3 \\
& y_1 + 3y_3 \leq 2 \\
& 5y_1 + y_2 - y_3 \geq -3 \\
& -3y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 1 \\
& y_1, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

[C]
$$
\begin{array}{rl}
\min & y_1 + 9y_2 + 6y_3 \\
& y_1 + 3y_3 \leq 2 \\
& 5y_1 + y_2 - y_3 \geq -3 \\
& -3y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 1 \\
& y_1, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

3. Dire se il vettore $\mathbf{v} = (1, -2, 3)$ è combinazione affine dei vettori $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 0, 2)$ motivando la risposta. In caso contrario, specificare di che tipo di combinazione si tratta.

Il vettore $\mathbf{v}$ è combinazione lineare (ma non affine) dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ con coefficienti -6, -4, $^5/_2$.

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione, o ammette infinite soluzioni, ovvero non ammette soluzione.

$$
\begin{array}{c}
15x_1 - 45x_2 \geq 1 \\
-3x_1 - 9x_2 + 27x_3 - 27x_4 \leq -1 \\
-6x_1 + 9x_3 - 9x_4 \geq 1 \\
-6x_2 + 3x_3 - 3x_4 \leq -1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

x_1	x_2	x_3	x_4	$\geq$
15	–45	0	0	1
3	9	–27	27	1
–6	0	9	–9	1
0	6	–3	3	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

x_1	x_2	x_3	$\geq$
15	–45	0	1
–15	9	0	4
–6	18	0	4
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
–6	0	9	1

x_1	x_2	$\geq$
–60	0	21
0	0	11
1	0	0
15	0	1

Dall'ultima tabella si ottiene il sistema $-60x_1 \geq 21$, $0 \geq 11$, $x_1 \geq 0$, $15x_1 \geq 1$, chiaramente privo di soluzioni.

5. Una fabbrica di prodotti elettronici produce 4 tipi di componenti. Da analisi effettuate risulta che una frazione f_i del componente i (i = 1, …, 4) risulta mediamente difettosa. Per porre almeno parzialmente rimedio si decide di eseguire dei controlli a campione sulla produzione. Si indichi con n_i il numero di componenti di tipo i prodotti in una giornata, con $x_i \le n_i$ il numero di controlli eseguiti sui componenti di tipo i, e con c_i il costo di eseguire un controllo su un singolo componente di tipo i. Calcoliamo la probabilità che almeno uno dei componenti di tipo i controllati risulti difettoso come $f_i x_i/n_i$. Si vuole scegliere x_1, …, x_4 in modo da massimizzare la probabilità complessiva di trovare componenti difettosi (si ipotizzi che la difettosità di un componente non dipende da quella di nessun altro componente), tenendo conto che il numero totale di controlli eseguiti in una giornata non può superare un dato valore q, e il loro costo complessivo non può superare un dato valore c. Formulare il problema in termini di programmazione lineare, quindi risolverlo con il metodo del simplesso utilizzando i dati della tabella seguente, per q = 650 e c = 400 €.

	1	2	3	4
n_i	1200	2000	1500	1600
f_i	0,1	0,2	0,1	0,4
c_i	1	1,4	0,2	0,8

Con la notazione impostata nel testo, il problema si formula

$$
\begin{array}{ll}
\max & f_1x_1/n_1 + f_2x_2/n_2 + f_3x_3/n_3 + f_4x_4/n_4 \\
& 0 \le x_i \le n_i \qquad i = 1, \ldots, 4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le q \\
& c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \le c
\end{array}
$$

Sostituendo i dati della tabella si ottiene

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & (5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 15x_4)/60.000 & & \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \le & 650 \\
& 10x_1 + 14x_2 + 2x_3 + 8x_4 & \le & 4000 \\
& x_i & \ge & 0
\end{array}
$$

Si osservi che il primo insieme di vincoli nella forma generale si riduce in pratica alle clausole di non-negatività, in quanto con $n_i > q$ le limitazioni superiori risultano tutte implicate dal vincolo sul numero complessivo dei controlli. Aggiunte due variabili di slack z_1 e z_2, la tabella canonica del simplesso è quindi, semplicemente,

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
5	6	4	15	0	0	0
1	1	1	1	1	0	650
10	14	2	**8**	0	1	4.000

Di qui un'operazione di pivot in colonna 4 rende

x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
–55/4	–81/4	1/4	0	0	–15/8	–7500
–1/4	–3/4	3/4	0	1	–1/8	150
5/4	7/4	1/4	1	0	1/8	500

e con un ulteriore pivot in colonna 2 si ricava

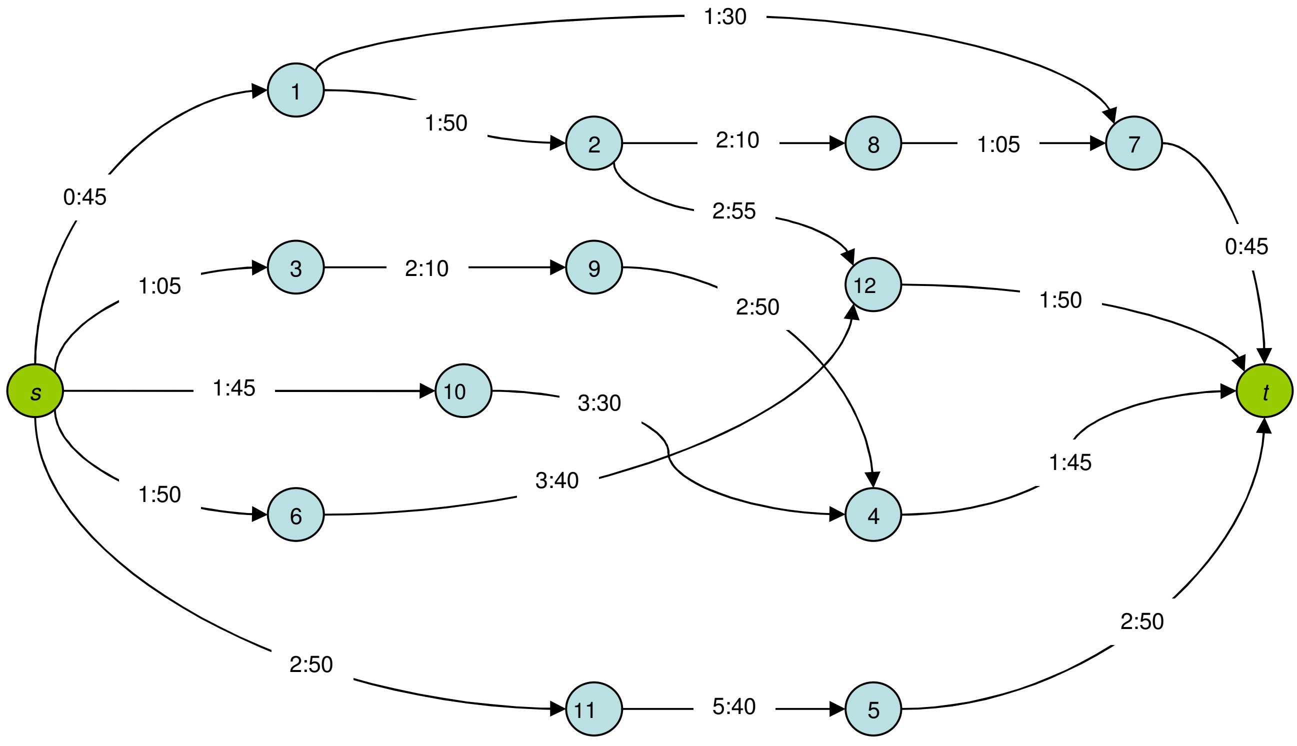
x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
–41/3	–20	0	0	–1/3	–11/6	–7550
–1/3	–1	1	0	4/3	–1/6	200
4/3	2	0	1	–1/3	1/2	450

La soluzione ottima consiste nel controllare 200 componenti di tipo 3 e 450 di tipo 4. La probabilità di incontrare un pezzo difettoso vale 7.550/60.000 ≅ 12,58%.

6. L'A.R.P.I.A. (Autolinee Regionali Pubbliche dell'Italia Appenninica), con sede nell'ameno capoluogo di La Poiana, deve organizzare i servizi offerti assegnando a ciascun autista in ogni giornata un turno costituito da un certo insieme di viaggi. Nella singola giornata un autista può fare un numero imprecisato di viaggi, a patto che la durata complessiva del suo impiego non superi le 8 ore di guida complessive. Ogni turno ha inizio e termina a La Poiana, luogo equidistante da tutte le località oggetto del servizio e raggiunto autonomamente dai conducenti. Elencare l'insieme dei turni giornalieri ammissibili, ovvero descriverlo implicitamente in termini di (s, t)-cammini su un opportuno grafo orientato i cui nodi diversi da s e t corrispondono alle corse previste. Successivamente, formulare in termini di programmazione lineare intera il problema di coprire tutti i viaggi con il minimo numero di autisti.

Corsa	*Tragitto*	*Partenza*	*Arrivo*	*Durata*
1	Vallombrosa-Colfiorito	8:00	9:30	1:30
2	Colfiorito-Montalto	10:00	12:10	2:10
3	Vallombrosa-Pratoverde	9:00	11:10	2:10
4	Vallombrosa-Marechiaro	16:15	19:45	3:30
5	Marechiaro-Montalto	14:00	19:40	5:40
6	Vallombrosa-Montalto	9:20	13:00	3:40
7	Colfiorito-Vallombrosa	18:00	19:30	1:30
8	Montalto-Colfiorito	14:20	16:30	2:10
9	Pratoverde-Vallombrosa	12:00	14:10	2:10
10	Marechiaro-Vallombrosa	12:00	15:30	3:30
11	Montalto-Marechiaro	8:00	13:40	5:40
12	Montalto-Vallombrosa	13:20	17:00	3:40

Il grafo G riportato in figura associa un nodo a ciascuna corsa, e ha un arco ij se la corsa j può essere fatta dopo la corsa i: questo accade, ovviamente, se la corsa i termina nella città di partenza della corsa j e prima della partenza di quest'ultima(per semplicità non sono stati riportati tutti gli archi sw e wt). I nodi s e t rappresentano l'inizio e la fine di ogni turno, e ogni turno corrisponde quindi a un (s, t)-cammino di G. Il grafo può essere pesato sui nodi con la durata delle corse, ma poiché ciascun nodo toccato da un cammino ha un solo arco entrante e un solo arco uscente, tale peso si può equiripartire tra gli archi, dando luogo ai pesi indicati in figura.



Il problema di coprire tutti i servizi con il minimo numero di autisti (cioè di turni) ha la forma

$$\begin{array}{ll} \min & \sum x_k \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{1} \\ & x \in \{0, 1\}^N \end{array}$$

dove x_k è pari a 1 se e solo se il k-esimo turno è prescelto, **1** è un vettore di 12 elementi pari a 1 (uno per ogni corsa), e **A** è una matrice nella quale la colonna k-esima rappresenta il vettore caratteristico delle corse eseguite nel k-esimo turno (ed è quindi individuata da uno specifico (s, t)-cammino di G).