RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

Soluzioni prova scritta del 22 Luglio 2008

1. Dato un grafo $G = (V, E)$, siano $U = V$ l'insieme universo e $\mathfrak{I}$ una famiglia di sottoinsiemi di U così definita: $\mathfrak{I} = \{X \subseteq U : C$ è una clique$\}$. La coppia $(U, \mathfrak{I})$ è un matroide? Giustificare la risposta oppure fornire un controesempio.

La coppia $(U, \mathfrak{I})$ gode della proprietà di subclusione, ma non gode della proprietà di scambio. Si consideri il grafo formato da un arco $X = \{1,2\}$ e una clique $Y = \{3,4,5\}$, in cui i nodi 1, 2 non sono adiacenti ai nodi 3, 4, 5. Per la coppia $X, Y \in \mathfrak{I}$ non vale la proprietà di scambio.

2. Il duale D del problema P)

$$\begin{array}{lrcl} \min & x_1 - 2x_2 + x_3 & & \\ & x_2 - 2x_3 & \geq & 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 9 \\ & x_1 + x_3 & = & 3 \\ & x_1, x_3 & \geq & 0 \\ & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

si scrive

[A]
$$\begin{array}{lrcl} \max & y_1 - 9y_2 + 3y_3 & & \\ & -y_2 + y_3 & \leq & 1 \\ & y_1 - y_2 - y_4 & = & -2 \\ & -2y_1 + y_2 + y_3 & \leq & 1 \\ & y_1, y_2, y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

[B]
$$\begin{array}{lrcl} \min & -y_1 + 9y_2 - 3y_3 & & \\ & -y_2 + y_3 & \leq & 1 \\ & y_1 - y_2 + y_4 & = & -2 \\ & -2y_1 + y_2 + y_3 & \leq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

[C]
$$\begin{array}{lrcl} \max & y_1 + 9y_2 + 3y_3 & & \\ & y_2 - y_3 & \geq & -1 \\ & y_1 - y_2 & \geq & -2 \\ & 2y_1 - y_2 - y_3 & \geq & -1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

3. Applicare il metodo del simplesso per determinare (se esiste) una soluzione del problema (P) dell'esercizio 2.

Cambiando x_2 in $-x_2$ e aggiungendo variabili non negative di surplus/slack il problema si riscrive in forma standard

$$\begin{array}{lrcl} \min & x_1 - 2x_2 + x_3 & & \\ & -x_2 - 2x_3 - w_1 & = & 1 \\ & x_1 - x_2 - x_3 + w_2 & = & 9 \\ & x_1 + x_3 & = & 3 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 & \geq & 0 \end{array}$$

La tabella

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
1	–2	1	0	0	0
0	–1	–2	–1	0	1
1	–1	–1	0	1	9
1	0	1	0	0	3

non è in forma canonica. Risolviamo il problema ausiliario ottenuto aggiungendo due variabili z_1, z_2 al primo e al terzo vincolo, e minimizzandone la somma:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	z_1	z_2	
0	0	0	0	0	1	1	0
0	–1	–2	–1	0	1	0	1
1	–1	–1	0	1	0	0	9
1	0	1	0	0	0	1	3

La tabella di questo problema si rende canonica sottraendo alla riga 0 le righe 1 e 3:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	z_1	z_2	
–1	1	1	1	0	0	0	–4
0	–1	–2	–1	0	1	0	1
1	–1	–1	0	1	0	0	9
1	0	1	0	0	0	1	3

Eseguendo un'operazione di pivot in colonna 1 si ha:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	z_1	z_2	
0	1	2	1	0	0	1	–1
0	–1	–2	–1	0	1	0	1
0	–1	0	0	1	0	–1	6
1	0	1	0	0	0	1	3

La tabella ottenuta è ottima ma la variabile z_2 non è uscita dalla base. Dal momento che la funzione obiettivo vale 1, il problema (P) non ammette soluzione.

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione ovvero ammette infinite soluzioni ovvero non ammette nessuna soluzione.

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_2 - x_3 \geq -1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{gathered}$$

x1	x2	x3	x4	≥
0	1	-1	0	-1
-1	1	0	1	2
1	-1	0	-1	-2
2	-1	-1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

x1	x2	x3	X4	≥
0	1	0	0	-1
-1	1	0	1	2
1	-1	0	-1	-2
2	-1	0	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	1	0

x1	x2	x3	x4	≥
0	1	0	0	-1
0	0	0	0	0
1	-1	0	0	-2
2	-1	0	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0

Dall'ultima tabella, segue che $x_2 \geq 0$ e quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

5. Chi beve birra…

Una fabbrica produce quattro tipi di birra: chiara e, scura; normale e doppio malto. Gli ingredienti della birra sono acqua, malto e luppolo. Produrre un ettolitro di birra richiede le quantità riportate in tabella (per gli ingredienti diversi dall'acqua si usano unità di misura venusiane)

ingrediente	*normale chiara*	*normale scura*	*doppio malto chiara*	*doppio malto scura*
acqua (hl)	1,20	1,12	1,20	1,12
malto (zq)	18	18	26	26
luppolo (zq)	3	2	3	2

La fabbrica dispone al giorno di 8.000 ettolitri di acqua, 98.000 zq. di malto e 10.000 zq. di luppolo. Una bottiglia da ¾ di birra si vende ai prezzi (in euro) indicati qui sotto

	normale chiara	*normale scura*	*doppio malto chiara*	*doppio malto scura*
prezzi (€)	1,20	1,80	2,10	2,40

D'altra parte uno zq. di malto costa 5€; la birra scura richiede malto tostato e la tostatura di uno zq. costa 1€; uno zq. di luppolo costa invece 11€. Qual è l'uso degli ingredienti che massimizza il guadagno giornaliero? Formulate il problema e impostatelo per la risoluzione con il metodo del simplesso producendo una tabella canonica iniziale e ricopiandola nello spazio seguente.

Indicando con $x_1, \ldots, x_4$ gli ettolitri giornalieri di birra dei quattro tipi prodotti il ricavo complessivo si scrive

$$R(\mathbf{x}) = 400(1{,}20x_1 + 1{,}80x_2 + 2{,}10x_3 + 2{,}40x_4)/3 = 160x_1 + 240x_2 + 280x_3 + 320x_4$$

D'altra parte ogni ettolitro di birra di un certo tipo consuma malto e luppolo in ragione del fabbisogno di quel tipo riprodotto in tabella. Il costo complessivo del malto è dato da

$$M(\mathbf{x}) = 5\cdot(18x_1 + 26x_3) + 6\cdot(18x_2 + 26x_4) =$$

e quello del luppolo da

$$L(\mathbf{x}) = 33\cdot(x_1 + x_3) + 22\cdot(x_2 + x_4)$$

Il guadagno giornaliero è perciò pari a

$$R(\mathbf{x}) - M(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x}) = 37x_1 + 110x_2 + 117x_3 + 142x_4$$

problema si formula quindi

$$\begin{array}{lll} \max & 37x_1 + 110x_2 + 117x_3 + 142x_4 & \\ & 1{,}20x_1 + 1{,}12x_2 + 1{,}20x_3 + 1{,}12x_4 & \leq 8.000 \\ & 18x_1 + 18x_2 + 26x_3 + 26x_4 & \leq 98.000 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq 10.000 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

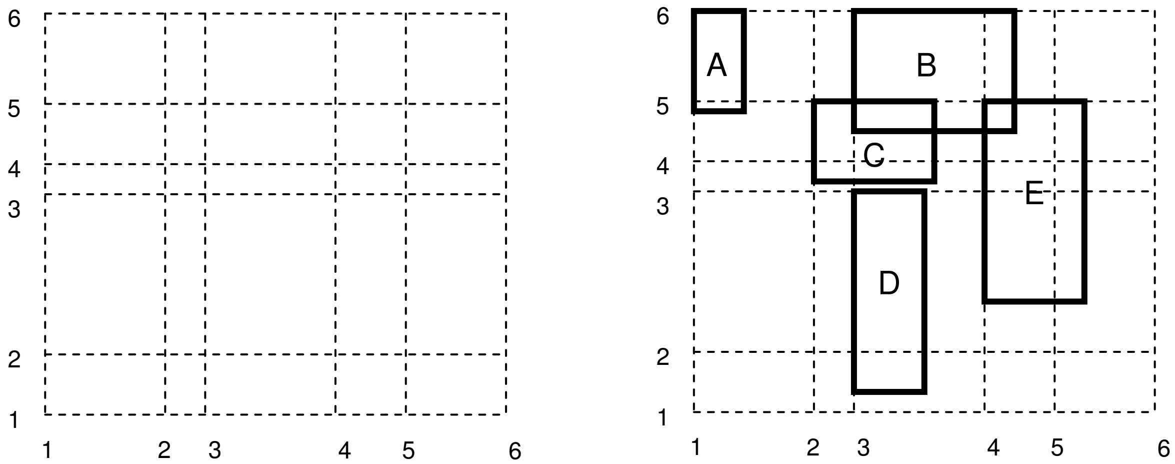
Si ha quindi immediatamente la tabella canonica

x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
37	110	117	142	0	0	0	0
120	112	120	112	1	0	0	800.000
18	18	26	26	0	1	0	98.000
3	2	3	2	0	0	1	10.000

Proseguendo col metodo si conclude che la soluzione ottima consiste nel produrre solo birra scura: 4.000 ettolitri normale e 1.000 doppio malto. Il guadagno relativo è di 582.000 € al giorno.

6. I rettangoli

I rettangoli rappresentati in figura possono essere spostati dove si vuole, a patto che non siano ruotati e che l'angolo superiore sinistro coincida con uno degli incroci della griglia riportata a tratteggio. Formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di posizionare i rettangoli in modo da minimizzare la somma delle aree delle loro intersezioni a due a due.



Poniamo $x_{ih} = 1$ se e solo se il rettangolo i è posizionato all'incrocio h. Siano $p = (i, j)$, $q = (h, k)$ e sia a_{pq} l'area dell'intersezione della coppia di rettangoli $p = (i, j)$ quando il rettangolo i (il rettangolo j) è posizionato all'incrocio h (all'incrocio k). Poniamo inoltre $y_{pq} = 1$ se $x_{ih} = x_{jk} = 1$, e $y_{pq} = 0$ altrimenti. Il problema si formula allora

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \textstyle\sum_p \sum_q a_{pq}\, y_{pq} \\
& x_{ih} + x_{jk} - 1 \leq y_{pq} \qquad \text{per } p = (i, j),\ q = (h, k) \\
& x_{ih},\ y_{pq} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$