RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**
prova parziale del 26 Giugno 2008

Chi ha superato la prova intermedia nell'A.A. corrente può limitarsi a risolvere i problemi 4, 5, 6, 7 sul retro del foglio: per il superamento della prova occorre risolvere correttamente i problemi 4, 5 e almeno uno tra 6 e 7. Chi non ha superato la prova intermedia nell'A.A. corrente deve risolvere anche i problemi 1, 2, 3.

1. Dato un grafo $G = (V, E)$, siano $U = E$ l'insieme universo e $\Im$ una famiglia di sottoinsiemi di U così definita: $\Im = \{X \subseteq U: X$ è un matching$\}$. La coppia $(U, \Im)$ è un matroide? Giustificare la risposta oppure fornire un controesempio.
Anche se vale la proprietà di subclusione (ogni sottoinsieme di un matching è a sua volta un matching) non si tratta evidentemente di un matroide. Infatti in un grafo di nodi (1, 2, 3, 4), gli insiemi {13} e {12, 34} formano due matching, ma nessun elemento del secondo può essere aggiunto al primo formando un matching.

2. Dire se il vettore $\mathbf{u} = (11/12, -1/2, 9/20)$ è una combinazione affine dei vettori $\mathbf{u}_1 = (0, -2, 5/2)$, $\mathbf{u}_2 = (1/2, 1, -2)$ e $\mathbf{u}_3 = (2/3, 0, 1/5)$ motivando la risposta. In caso contrario, specificare di che tipo di combinazione si tratta.
Il vettore $\mathbf{u}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ con coefficienti ½, ½, 1. Si tratta perciò di una combinazione conica, non affine.

3. Un gioco d'azzardo per i più piccini
Le estrazioni del lotto in forma ridotta per i minorenni consentono di giocare solo ambi e terni estratti fra i numeri 1, 2, 3, 4. Giocare un ambo costa 40¢, giocare un terno 1€, e ogni settimana vengono estratti 3 numeri su 4. Si vuole giocare un sistema che lasci scoperti il minor numero possibile di ambi con un budget di 2€. Formulare il problema come programmazione lineare intera 0-1.
Gli ambi possibili sono 6, i terni possibili 4. Ogni ambo copre se stesso, mentre il terno *abc* copre gli ambi *ab*, *bc*, *ac*. Si associno le variabili di decisione 0-1 x_j ai possibili ambi e terni da giocare ($j = 1, \ldots, 10$) facendo loro assumere valore 1 se e solo la giocata corrispondente viene prescelta. Si indichi poi con y_i una variabile di decisione 0-1 che assume valore 1 se e solo se l'ambo i rimane scoperto. Si associ infine a ogni giocata j un vettore 0-1 $\mathbf{u}_j$ a 6 componenti corrispondenti ai possibili ambi: la componente u_{ij} varrà 1 se e solo se l'ambo i è coperto dalla giocata j. I vettori $\mathbf{u}_j$ formano la seguente matrice:

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_4$	$\mathbf{u}_5$	$\mathbf{u}_6$	$\mathbf{u}_7$	$\mathbf{u}_8$	$\mathbf{u}_9$	$\mathbf{u}_{10}$
12	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
13	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
14	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
23	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
24	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
34	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

Il problema si formula

$$
\begin{array}{ll}
\min & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \\
 & x_1 + x_7 + x_8 + y_1 \geq 1 \\
 & x_2 + x_7 + x_9 + y_2 \geq 1 \\
 & x_3 + x_8 + x_9 + y_3 \geq 1 \\
 & x_4 + x_7 + x_{10} + y_4 \geq 1 \\
 & x_5 + x_8 + x_{10} + y_5 \geq 1 \qquad 0{,}4(x_1 + \ldots + x_6) + x_7 + \ldots + x_{10} \leq 2 \\
 & x_6 + x_9 + x_{10} + y_6 \geq 1 \qquad x_1, \ldots, x_{10} \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin dire se il seguente sistema lineare è compatibile.

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\geq 2\\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 3\\
-3x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 1\\
x_3 &\leq 0\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

x_1	x_2	x_3	$\geq$
–1	5	3	2
2	2	1	3
3	–1	–4	–1
0	0	–1	0
1	0	0	0
0	1	0	0

x_1	x_2	x_3	$\geq$
0	**12**	7	7
0	**14**	5	5
0	**5**	3	2
0	**0**	–1	0
0	**1**	0	0

x_1	x_2	x_3	$\geq$
0	0	–1	0

Il sistema è evidentemente compatibile.

5. Scrivere il duale (D) del problema P) min

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3\\
& 2x_2 - x_3 = 2\\
& x_1 - x_2 + x_3 \leq 1\\
& x_1 + 2x_2 \geq 4\\
& x_1, x_3 \geq 0\\
& x_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

Supponendo che (P) sia illimitato inferiormente, che cosa si può dire del problema (D)?

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3\\
& 2x_2 - x_3 = 2\\
& -x_1 + x_2 - x_3 \geq -1\\
& x_1 + 2x_2 \geq 4\\
& -x_2 \geq 0\\
& x_1, x_3 \geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\max\quad & 2y_1 - y_2 + 4y_3\\
& -y_2 + y_3 \leq 2\\
& 2y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 = -1\\
& -y_1 - y_2 \leq 3\\
& y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

In alternativa si può porre $x_2' = -x_2$, da cui

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1 + x_2' + 3x_3\\
& -2x_2' - x_3 = 2\\
& -x_1 - x_2' - x_3 \geq -1\\
& x_1 - 2x_2' \geq 4\\
& x_1, x_2', x_3 \geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\max\quad & 2y_1 - y_2 + 4y_3\\
& -y_2 + y_3 \leq 2\\
& 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq -1\\
& -y_1 - y_2 \leq 3\\
& y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

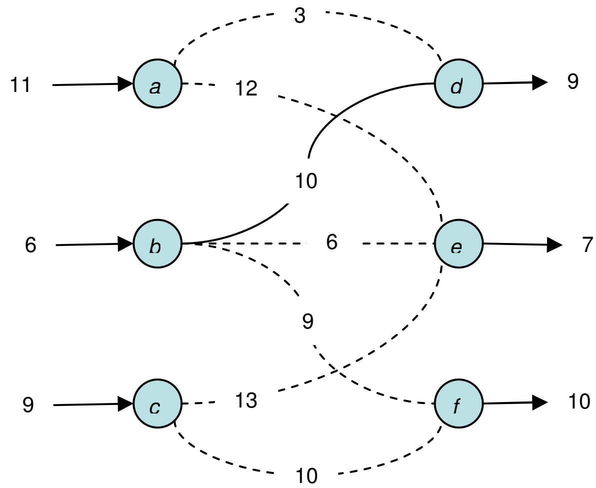
Se (P) fosse illimitato inferiormente, (D) non ammetterebbe soluzione in quanto per dualità debole $\mathbf{yb} \leq \mathbf{cx}$.

6. Logistica distributiva

Si deve organizzare il trasporto di 26 unità di un certo prodotto dalle città a, b, c alle città d, e, f attraverso la rete di figura. Le quantità disponibili presso le origini e richiesta dalle destinazioni sono indicate in figura. Trasportare un'unità di prodotto lungo il generico arco ij della rete costa c_{ij} (in numeri associati agli archi della rete corrispondono ai costi unitari c_{ij}). Formulare il problema come programmazione lineare, e rispondere alle domande seguenti.

Una soluzione ottima è intera? Se sì, perché? Se no, perché?

Trasportare merce sugli archi tratteggiati corrisponde a una soluzione di base? Se sì, perché? Se no, perché?



Indichiamo con x_{ij} la quantità trasportata dalla città i alla città j. Il problema si formula:

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 3x_{ad} + 12x_{ae} + 10x_{bd} + 6x_{be} + 9x_{bf} + 13x_{ce} + 10x_{cf} & & \\
 & x_{ad} + x_{ae} & = & 11 \\
 & x_{bd} + x_{be} + x_{bf} & = & 6 \\
 & x_{ce} + x_{cf} & = & 9 \\
 & x_{ad} + x_{bd} & = & 9 \\
 & x_{ae} + x_{be} + x_{ce} & = & 7 \\
 & x_{bf} + x_{cf} & = & 10 \\
 & x_{ij} & \geq & 0 \qquad ij \in E
\end{array}
$$

Il problema è in forma standard e la sua matrice dei coefficienti è la matrice di incidenza nodi-archi di un grafo (simmetrico) bipartito e come tale è totalmente unimodulare. Poiché il vettore dei termini noti è intero, tale è anche una qualsiasi soluzione di base e, di conseguenza, almeno una soluzione ottima risulterà intera.
Una base è rappresentata da una sottomatrice di rango pieno. In una matrice del tipo considerato sono di rango pieno le sottomatrici le cui colonne corrispondono ad alberi ricoprenti il grafo. Quelli tratteggiati non sono archi di un albero ricoprente, in quanto formano il ciclo $\{be, ec, cf, fb\}$: quindi una soluzione che trasporti quantità positive su tali archi e nulle altrove non è di base.

7. Produzione industriale

Un impianto trasforma 2 tipi di risorsa, disponibili in quantità $b_1 = 120$, $b_2 = 100$, in altrettanti prodotti. Il primo prodotto, insieme a un opportuno quantitativo di una terza risorsa disponibile in quantità $b_3 = 160$, dà luogo a un terzo tipo di prodotto. Attenzione: fabbricare un'unità di questo prodotto causa il consumo di 2 unità del primo prodotto.
La risorsa 3 può essere commercializzata (acquistata o venduta) al prezzo unitario c_0, mentre il prodotto i viene venduto al prezzo unitario c_j, $j = 1, 2, 3$. Risolvere con il metodo del simplesso il problema di determinare i livelli di produzione x_1, x_2, x_3 dei tre prodotti che massimizzano il profitto complessivo, sapendo che la produzione di un'unità di prodotto j consuma a_{ij} unità di risorsa i (i valori dei parametri sono riportati nella tabella seguente).

	Prodotto 1	*Prodotto 2*	*Prodotto 3*	
Risorsa 1	$a_{11} = 1$	$a_{12} = 3$	$a_{13} = 0$	
Risorsa 2	$a_{21} = 2$	$a_{22} = 2$	$a_{23} = 0$	
Risorsa 3	$a_{31} = 0$	$a_{32} = 0$	$a_{33} = 3$	$c_0 = 3$
	$c_1 = 14$	$c_2 = 12$	$c_3 = 17$	*prezzi*

Indichiamo con x_0 il quantitativo di risorsa 3 destinato alla vendita (tale valore, se negativo, si intende acquistato). L'obiettivo del problema si scrive:

$$\max \quad 3x_0 + 14x_1 + 12x_2 + 17x_3$$

Una soluzione del problema deve soddisfare i vincoli

$$\begin{array}{rll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \le & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & \le & b_2 \\ 2x_3 & \le & x_2 \\ a_{33}x_3 & \le & b_3 - x_0 \\ x_1, x_2, x_3 & \ge & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rll} x_1 + 3x_2 & \le & 120 \\ 2x_1 + 2x_2 & \le & 100 \\ -x_1 + 2x_3 & \le & 0 \\ x_0 \qquad + 3x_3 & \le & 160 \\ x_1, x_2, x_3 & \ge & 0 \end{array}$$

Introducendo tre variabili di slack e ponendo $x_0 = u_0 - z_0$ il problema si porta facilmente in forma canonica. La tabella iniziale del simplesso è:

u_0	z_0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
3	–3	14	12	17	0	0	0	0
0	0	1	3	0	1	0	0	120
0	0	2	2	0	0	1	0	100
0	0	–1	0	2	0	0	1	0
1	–1	0	0	3	0	0	0	160

e la forma canonica si ottiene sommando alla riga 0 l'ultima riga moltiplicata per –3:

u_0	z_0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
0	0	14	12	8	0	0	0	–480
0	0	1	3	0	1	0	0	120
0	0	**2**	2	0	0	1	0	100
0	0	–1	0	2	0	0	1	0
1	–1	0	0	3	0	0	0	160

La soluzione iniziale di base è degenere. Scegliendo x_1 come variabile entrante ed eseguendo un'operazione di pivot la degenerazione viene però eliminata, e si ricava

u_0	z_0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
0	0	0	–2	8	0	–7	0	–1180
0	0	0	2	0	1	–½	0	70
0	0	1	1	0	0	½	0	50
0	0	0	1	**2**	0	½	1	50
1	–1	0	0	3	0	0	0	160

Ora si può scegliere x_3 come variabile entrante. Eseguendo l'operazione di pivot in riga 3 si ha

u_0	z_0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
0	0	0	–6	0	0	–9	0	–1380
0	0	0	2	0	1	–½	0	70
0	0	1	1	0	0	½	0	50
0	0	0	½	1	0	¼	½	25
1	–1	0	–1,5	0	0	–¾	–1,5	85

La soluzione così determinata è ottima. Essa consiste nel fabbricare 50 unità di prodotto 1, 25 di prodotto 3, e nell'alienare 85 unità eccedenti di risorsa 3.