RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 26 Giugno 2008

Chi ha superato la prova intermedia nell'A.A. corrente può limitarsi a risolvere i problemi 4, 5, 6, 7 sul retro del foglio: per il superamento della prova occorre risolvere correttamente i problemi 4, 5 e almeno uno tra 6 e 7. Chi non ha superato la prova intermedia nell'A.A. corrente deve risolvere anche i problemi 1, 2, 3.

1. Dato un grafo $G = (V, E)$, siano $U = V$ l'insieme universo e $\Im$ una famiglia di sottoinsiemi di U così definita: $\Im = \{X \subseteq U : X$ è un insieme stabile$\}$. La coppia $(U, \Im)$ è un matroide? Giustificare la risposta oppure fornire un controesempio.

La famiglia è subclusiva ma non gode in generale della proprietà di scambio: in un grafo con 3 nodi e archi 12, 13 gli insiemi $\{1\}$ e $\{2, 3\}$ sono entrambi stabili, ma aggiungendo al primo un elemento qualsiasi del secondo l'insieme ottenuto perde questa proprietà.

2. Dire se il vettore $\mathbf{u} = (2/3, 1/2, 7/4)$ è una combinazione conica dei vettori $\mathbf{u}_1 = (1/3, 0, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (-5, 3, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1/2)$ motivando la risposta. In caso contrario, specificare di che tipo di combinazione si tratta.

Il vettore $\mathbf{u}$ si ottiene come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ con coefficienti ½, 0, ½. Si tratta di una combinazione conica che al medesimo tempo risulta affine: quindi di una combinazione convessa.

3. Un gioco d'azzardo per i più piccini

Le estrazioni del lotto in forma ridotta per i minorenni consentono di giocare solo ambi e terni estratti fra i numeri 1, 2, 3, 4. Giocare un ambo costa 40¢, giocare un terno 1€, e ogni settimana vengono estratti 3 numeri su 4. Si vuole giocare un sistema di costo minimo che garantisca l'uscita sicura di almeno un ambo. Formulare il problema come programmazione lineare intera 0-1

Gli ambi possibili sono 6, i terni possibili 4. Ogni ambo copre se stesso, mentre il terno *abc* copre gli ambi *ab*, *bc*, *ac*. Si associno le variabili di decisione 0-1 x_j ai possibili ambi e terni da giocare ($j = 1, \ldots, 10$) facendo loro assumere valore 1 se e solo la giocata corrispondente viene prescelta. Si associ poi a ogni giocata j un vettore 0-1 $\mathbf{u}_j$ a 6 componenti corrispondenti ai possibili ambi: la componente u_{ij} varrà 1 se e solo se l'ambo i è coperto dalla giocata j. I vettori $\mathbf{u}_j$ formano la seguente matrice:

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_4$	$\mathbf{u}_5$	$\mathbf{u}_6$	$\mathbf{u}_7$	$\mathbf{u}_8$	$\mathbf{u}_9$	$\mathbf{u}_{10}$
12	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
13	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
14	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
23	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
24	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
34	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

Il problema si formula

$$\begin{array}{ll}
\min & 0{,}4(x_1 + \ldots + x_6) + x_7 + \ldots + x_{10} \\
& x_1 + x_7 + x_8 \geq 1 \\
& x_2 + x_7 + x_9 \geq 1 \\
& x_3 + x_8 + x_9 \geq 1 \\
& x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1 \\
& x_5 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\
& x_6 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\
& x_1, \ldots, x_{10} \in \{0, 1\}
\end{array}$$

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin dire se il seguente sistema lineare è compatibile.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &\le 2\\
x_1 - 3x_2 - x_3 &= 1\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 2\\
x_2 &\ge 0\\
x_1 &\le 0
\end{aligned}
$$

x_1	x_2	x_3	$\le$
2	5	–4	2
1	–3	–1	1
–1	3	1	–1
3	2	1	2
0	–1	0	0
1	0	0	0

x_1	x_2	x_3	$\le$
0	11	**–2**	0
0	0	**0**	0
0	11	**4**	–1
0	3	**1**	–1
0	–1	**0**	0

x_1	x_2	x_3	$\le$
0	33	0	–1
0	17	0	–2
0	–1	0	0

Il sistema richiede $0 \le x_2 \le \min\{-1/33, -2/17\}$ ed è chiaramente incompatibile.

5. Scrivere il duale (D) del problema P)

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & x_1 - 2x_2 + x_3 & & \\
& x_2 - 3x_3 & \le & 1\\
& x_1 + x_2 - x_3 & = & 5\\
& x_1 + 2x_3 & \ge & 3\\
& x_1, x_2 & \ge & 0\\
& x_3 & \le & 0
\end{array}
$$

Supponendo che (P) ammetta una soluzione ottima $\mathbf{x}^*$, che cosa si può dire del problema (D)?

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & x_1 - 2x_2 + x_3 & & \\
& -x_2 + 3x_3 & \ge & -1\\
& -x_1 + x_2 - x_3 & = & 5\\
& x_1 + 2x_3 & \ge & 3\\
& -x_3 & \ge & 0\\
& x_1, x_2 & \ge & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcl}
\max & -y_1 + 5y_2 + 3y_3 & & \\
& -y_2 + y_3 & \le & 1\\
& -y_1 + y_2 & \le & -2\\
& 3y_1 - y_2 + 2y_3 - y_4 & = & 1\\
& y_1, y_3, y_4 & \ge & 0
\end{array}
$$

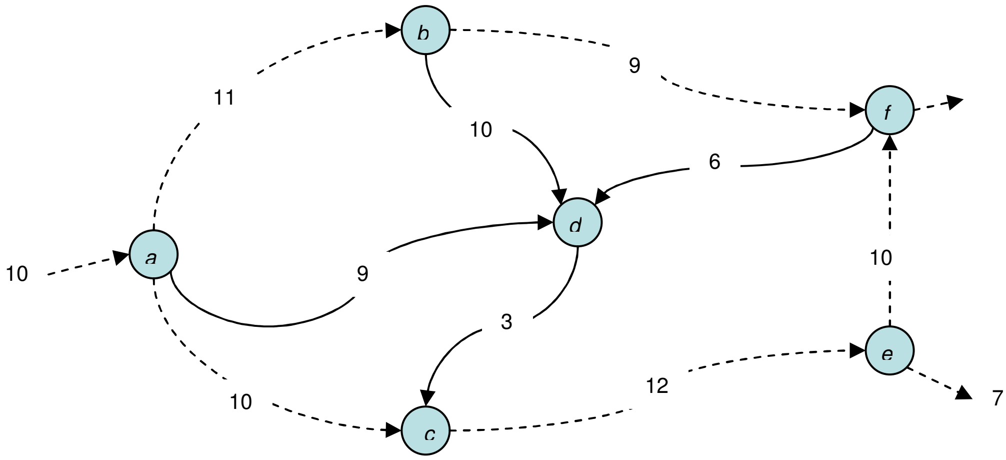
In alternativa si può porre $x_3' = -x_3$, da cui

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & x_1 - 2x_2 - x_3' & & \\
& -x_2 - 3x_3' & \ge & -1\\
& -x_1 + x_2 + x_3' & = & 5\\
& x_1 - 2x_3' & \ge & 3\\
& x_1, x_2, x_3' & \ge & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcl}
\max & -y_1 + 5y_2 + 3y_3 & & \\
& -y_2 + y_3 & \le & 1\\
& -y_1 + y_2 & \le & -2\\
& 3y_1 - y_2 + 2y_3 & \ge & 1\\
& y_1, y_3 & \ge & 0
\end{array}
$$

Se (P) ammettesse una soluzione ottima finita $\mathbf{x}^*$, anche (D) ammetterebbe soluzione ottima finita $\mathbf{y}^*$ e per dualità forte si avrebbe $\mathbf{yb}^* = \mathbf{cx}^*$.

6. Logistica distributiva

Si deve organizzare il trasporto di 10 unità di un certo prodotto dalla città *a* alle città *e*, *f* attraverso la rete di figura. La quantità richiesta dalla città *e* è pari a 7 unità. Trasportare un'unità di prodotto lungo il generico arco *ij* della rete costa c_{ij} (in numeri associati agli archi della rete corrispondono ai costi unitari c_{ij}). Formulare il problema come programmazione lineare, e rispondere alle domande seguenti.
Una soluzione ottima è intera? Se sì, perché? Se no, perché?
Trasportare merce sugli archi tratteggiati corrisponde a una soluzione di base? Se sì, perché? Se no, perché?



Indichiamo con x_{ij} la quantità trasportata lungo l'arco ij. Il problema si formula

$$
\begin{array}{llcl}
\min & 11x_{ab} + 10x_{ac} + 9x_{ad} + 10x_{bd} + 9x_{bf} + 12x_{ce} + 3x_{dc} + 10x_{ef} + 6x_{fd} & & \\
& -x_{ac} - x_{ad} & = & -10 \\
& x_{ab} - x_{bd} - x_{bf} & = & 0 \\
& x_{ac} - x_{ce} + x_{dc} & = & 0 \\
& x_{ad} + x_{bd} - x_{dc} + x_{fd} & = & 0 \\
& x_{ce} - x_{ef} & = & 7 \\
& x_{bf} + x_{ef} - x_{fd} & = & 3 \\
& x_{ij} & \geq & 0 \qquad ij \in E
\end{array}
$$

Il problema è in forma standard e la sua matrice dei coefficienti è totalmente unimodulare. Poiché il vettore dei termini noti è intero, ogni soluzione di base (e quindi anche almeno una soluzione ottima) è a componenti intere.
Una base corrisponde a una sottomatrice di rango pieno. Le sottomatrici della matrice di incidenza nodi-archi di un grafo orientato che godono di questa proprietà hanno le colonne corrispondenti a archi di un albero ricoprente il grafo. Questo non è il caso degli archi tratteggiati, quindi una soluzione che trasporti quantità positive su tali archi non è una soluzione di base del problema.

7. Produzione industriale

Un impianto trasforma 2 tipi di risorsa, disponibili in quantità $b_1 = 100$, $b_2 = 140$, in altrettanti prodotti. Il secondo prodotto, insieme a un opportuno quantitativo di una terza risorsa disponibile in quantità $b_3 = 120$, dà luogo a un terzo tipo di prodotto. Attenzione: fabbricare un'unità di questo prodotto causa il consumo di 2 unità del secondo prodotto.
La risorsa 3 può essere commercializzata (acquistata o venduta) al prezzo unitario c_0, mentre il prodotto i viene venduto al prezzo unitario c_j, $j = 1, 2, 3$. Risolvere con il metodo del simplesso il problema di determinare i livelli di produzione x_1, x_2, x_3 dei tre prodotti che massimizzano il profitto complessivo, sapendo che la produzione di un'unità di prodotto j consuma a_{ij} unità di risorsa i (i valori dei parametri sono riportati nella tabella seguente).

	Prodotto 1	*Prodotto 2*	*Prodotto 3*	
Risorsa 1	$a_{11} = 2$	$a_{12} = 2$	0	
Risorsa 2	$a_{21} = 3$	$a_{22} = 1$	0	
Risorsa 3	0	0	$a_{33} = 4$	$c_0 = 4$
	$c_1 = 12$	$c_2 = 14$	$c_3 = 18$	*prezzi*

Indichiamo con x_0 il quantitativo di risorsa 3 destinato alla vendita (tale valore, se negativo, si intende acquistato). L'obiettivo del problema si scrive:

$$\max \quad 4x_0 + 12x_1 + 14x_2 + 18x_3$$

Una soluzione del problema deve soddisfare i vincoli

$$
\begin{array}{rlcrl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \leq b_1 & \qquad & 2x_1 + 2x_2 & \leq 100 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & \leq b_2 & & 3x_1 + \ x_2 & \leq 140 \\
2x_3 & \leq x_2 & & -x_2 + 2x_3 & \leq 0 \\
a_{33}x_3 & \leq b_3 - x_0 & & x_0 \qquad\quad + 4x_3 & \leq 120 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq 0 & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Introducendo tre variabili di slack e ponendo $x_0 = u_0 - z_0$ il problema si porta facilmente in forma canonica. La tabella iniziale del simplesso è:

u_0	z_0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
4	–4	12	14	18	0	0	0	0
0	0	2	2	0	1	0	0	100
0	0	3	1	0	0	1	0	140
0	0	0	–1	2	0	0	1	0
1	–1	0	0	4	0	0	0	120

e la forma canonica si ottiene sommando alla riga 0 l'ultima riga moltiplicata per –4:

u_0	z_0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
0	0	12	14	2	0	0	0	–480
0	0	2	**2**	0	1	0	0	100
0	0	3	1	0	0	1	0	140
0	0	0	–1	2	0	0	1	0
1	–1	0	0	4	0	0	0	120

La soluzione iniziale di base è degenere. Scegliendo x_2 come variabile entrante ed eseguendo un'operazione di pivot la degenerazione viene però eliminata, e si ricava

u_0	z_0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
0	0	–2	0	2	–14	0	0	–1180
0	0	1	1	0	1	0	0	50
0	0	2	0	0	0	1	0	90
0	0	1	0	**2**	1	0	1	50
1	–1	0	0	4	0	0	0	120

Ora si può scegliere x_3 come variabile entrante. Eseguendo l'operazione di pivot in riga 3 si ha

u_0	z_0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
0	0	–3	0	0	–15	0	–1	–1230
0	0	1	1	0	1	0	0	50
0	0	2	0	0	0	1	0	90
0	0	½	0	1	½	0	½	25
1	–1	–2	0	0	–2	0	–2	20

La soluzione così determinata è ottima. Essa consiste nel fabbricare 50 unità di prodotto 2, 25 di prodotto 3, e nell'alienare 20 unità eccedenti di risorsa 3.