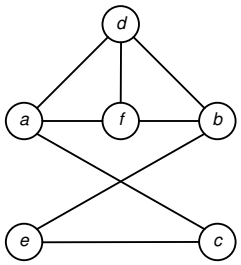
RICERCA OPERATIVA **prova scritta del 5 aprile 2005** **GRUPPO B**

1. Per formulare come programmazione lineare 0-1 il problema di determinare in un grafo $G = (V, E)$ un matching perfetto con il minimo numero di archi, occorre definire variabili di decisione

[A] x_{uv} associate a ciascun arco uv di E
[B] x_u associate a ciascun vertice u di V

Formulare il problema con riferimento al grafo di figura



$$\begin{aligned}\max\ & x_{ac} + x_{ad} + x_{af} + x_{bd} + x_{be} + x_{bf} + x_{ce} + x_{df} \\ & x_{ac} + x_{ad} + x_{af} = 1 \\ & x_{bd} + x_{be} + x_{bf} = 1 \\ & x_{ac} + x_{ce} = 1 \\ & x_{ad} + x_{bd} + x_{df} = 1 \\ & x_{be} + x_{ce} = 1 \\ & x_{af} + x_{bf} + x_{df} = 1 \\ & x_{ac}, x_{ad}, x_{af}, x_{bd}, x_{be}, x_{bf}, x_{ce}, x_{df} \geq 0\end{aligned}$$

2. Il duale del problema

$$\begin{aligned}\max\ & -3x_1 + x_2 + x_4 & \\ & 2x_1 + x_3 & = 2 \\ & -2x_1 + x_2 + 3x_4 & \leq 3 \\ & -x_2 + 2x_3 + 5x_4 & \geq 1 \\ & x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{aligned}$$

è il problema

[A]
$$\begin{aligned}\max\ & y_3 - 2y_1 - 3y_2 \\ & 2y_2 - 2y_1 = 3 \\ & y_2 + y_3 \geq 1 \\ & y_1 - 2y_3 \geq 0 \\ & 5y_3 - 3y_2 \leq -1 \\ & y_2, y_3 \geq 0\end{aligned}$$

[B]
$$\begin{aligned}\min\ & 2y_1 + 3y_2 - y_3 \\ & 2y_2 - 2y_1 = 3 \\ & y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1 + 2y_3 \geq 0 \\ & 5y_3 + 3y_2 \geq 1 \\ & y_2, y_3 \geq 0\end{aligned}$$

[C]
$$\begin{aligned}\max\ & y_3 - 2y_1 - 3y_2 \\ & 2y_2 - 2y_1 = 3 \\ & y_2 + y_3 \geq 1 \\ & y_1 - 2y_3 \geq 0 \\ & 5y_3 - 3y_2 \leq -1 \\ & y_2, y_3 \geq 0\end{aligned}$$

3. Se **x** è una soluzione ammissibile del problema

$$\begin{aligned}\max\ & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

e **y** è una soluzione ammissibile del suo duale, allora
[A] $\mathbf{cx} \geq \mathbf{yb}$
[B] $\mathbf{cx} > \mathbf{yb}$
[C] $\mathbf{cx} \leq \mathbf{yb}$

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determini una soluzione ottima del problema

$$\begin{aligned}\min\ & 4x_1 - 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq -3 \\ & x_1 - 5x_2 \geq 2\end{aligned}$$

Tabella iniziale

x_1	x_2	z	$\geq$
-4	2	1	0
-2	-1	0	3
1	-5	0	2

Soluzione ottima:
illimitato

5. Alle elezioni regionali della Valpadosta sono candidati P. Marrangio e F. Storehacker. L'esito del voto è incerto, anche in dipendenza della decisione della signora A. Sassolini. Se infatti costei decidesse di presentare una lista autonoma, sottrarrebbe voti a Storehacker favorendo Marrangio. Quest'ultimo può condizionare in parte gli eventi, indicando ai propri fedelissimi di dare un voto o alla lista Capricciosa (moderata) o alla lista PdCI, Partito dei Consumisti Italiani (più estremista). Il dr. L. Mannharen stima come segue il risultato finale per Marrangio in base ai possibili scenari:

a) la lista Sassolini si presenta alle elezioni
b) la lista Sassolini non si presenta
c) i voti di sezione per Marrangio vanno tutti alla lista Capricciosa
d) i voti di sezione per Marrangio vanno tutti alla lista PdCI

	c	d
a	46	53
b	51	44

Incaricato da Marrangio, il dr. Mannharen ha studiato la distribuzione ottimale dei voti di sezione formulando un problema di programmazione lineare in cui x_c e x_d rappresentano le percentuali di tali voti dirette alla lista Capricciosa e alla lista PdCI. L'obiettivo consiste nel calcolare x_c e x_d in modo da massimizzare il peggior risultato atteso per Marrangio, indipendentemente dalle scelte della Sassolini. Indicate qual è il programma lineare formulato, e risolvetelo con il metodo del simplesso.

Il problema formulato da Mannharen è:

$$\begin{aligned} \text{P)} \quad \max \quad & r \\ & r \le 46x_c + 53x_d \\ & r \le 51x_c + 44x_d \\ & x_c + x_d = 1 \\ & x_c, x_d \ge 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \text{P)} \quad \max \quad & r \\ & r - 46x_c - 53x_d \le 0 \\ & r - 51x_c - 44x_d \le 0 \\ & x_c + x_d = 1 \\ & x_c, x_d, r \ge 0 \end{aligned}$$

Poiché il problema non è in forma standard aggiungiamo due variabili di slack non negative w_1, w_2:

$$\begin{aligned} \text{P)} \quad \max \quad & r \\ & r - 46x_c - 53x_d + w_1 = 0 \\ & r - 51x_c - 44x_d + w_2 = 0 \\ & x_c + x_d = 1 \\ & x_c, x_d, r, w_1, w_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Otteniamo la seguente tabella, non canonica:

1	0	0	0	0	0
1	–46	–53	1		0
1	–51	–44		1	0
	1	1			1

Per renderla canonica risolviamo il problema ausiliario

$$\begin{aligned} \text{P}_0\text{)} \quad \min \quad & w_0 \\ & r - 46x_c - 53x_d + w_1 = 0 \\ & r - 51x_c - 44x_d + w_2 = 0 \\ & x_c + x_d + w_0 = 1 \\ & x_c, x_d, r, w_0, w_1, w_2 \ge 0 \end{aligned}$$

la cui tabella (non canonica) è:

0	0	0	1	0	0	0
1	–46	–53		1		0
1	–51	–44			1	0
	1	1	1			1

e, resa canonica, diventa:

0	–1	–1	0	0	0	–1
1	–46	–53		1		0
1	–51	–44			1	0
	1	1	1			1

Come colonne di pivot si possono scegliere la seconda e la terza. In ogni caso, l'unica riga di pivot che può essere scelta è la terza. Scegliendo l'elemento di pivot in posizione (3, 2) si ha la tabella ottima

0	0	0	1	0	0	0
1		–7	46	1		46
1		7	51		1	51
	1	1	1			1

dove la variabile x_c è entrata in base con valore 1 al posto della variabile w_0. Quindi la soluzione corrente ($x_c = 1$, $x_d = 0$) individua una base per il problema P, la cui tabella in forma canonica si scrive:

1	0	0	0	0	0
1		–7	1		46
1		7		1	51
	1	1			1

Il problema è di massimo, e vi è un unico costo ridotto positivo, corrispondente alla variabile r. L'elemento di pivot si trova in posizione (1, 1). Eseguendo l'operazione si ottiene

0	0	7	–1	0	–46
1		–7	1		46
		14	–1	1	5
	1	1			1

Ora è comparso un costo ridotto positivo nella colonna corrispondente alla variabile x_D. L'elemento di pivot si trova in posizione (3, 2). Eseguendo si ha la tabella ottima

0	0	0	–13/14	–1/14	–48,5
1	7		1		53
		1	–1/14	1/14	5/14
	1		1/14	–1/14	9/14

corrispondente alla soluzione $x_c = 9/14$, $x_d = 5/14$.