RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**
prova scritta del 5 febbraio 2008 **FOGLIO 1**

1. Siano A_2, A_5, A_9 gli insiemi dei multipli rispettivamente di 2, 5 e 9 che risultano ≤ 500, e $U = A_2 \cup A_5 \cup A_9$. Sia inoltre

$$\mathfrak{I} = \{Y \subseteq U \colon |Y \cap A_2| \leq 1, |Y \cap A_5| \leq 1, |Y \cap A_9| \leq 1 \text{ e } \forall y \in Y, y \in A_i \Rightarrow y \notin A_j, \text{ con } i, j \in \{2, 5, 9\} \text{ e } i \neq j\}$$

la famiglia di tutti i sottoinsiemi Y di U che contengono al più un multiplo di 2, al più un multiplo di 5 e al più un multiplo di 9, con in più la condizione che ogni elemento appartiene esclusivamente a un insieme tra A_2, A_5, A_9. Dire se la coppia $(U, \mathfrak{I})$:

[A] non gode della proprietà di scambio
[B] gode della proprietà di scambio ma non è subclusiva
[C] è un matroide

2. Il vettore (1/2, 1/3, 2) è combinazione
[A] conica
[B] convessa
[C] affine
dei vettori (1/2, 1/2, 1), (0, 1/6, 1) e (–1, –1/3, 0).

3. Data la coppia di problemi di programmazione lineare (primale/duale):

P) $\min \mathbf{cx}$ D) $\max \mathbf{yb}$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad\qquad \mathbf{y} \in S \subseteq \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

dove $\mathbf{A}$ è una matrice con m righe ed n colonne, scrivere in forma compatta il sistema di disequazioni che definisce il poliedro S. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

[A] $\mathbf{cx} \geq \mathbf{yb}$ per ogni coppia di soluzioni ammissibili $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$; $S = \{\mathbf{y} \in R^m \colon \mathbf{yA} = \mathbf{c}\}$
[B] $\mathbf{cx} \leq \mathbf{yb}$ per ogni coppia di soluzioni ammissibili $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$
[C] $\mathbf{cx} < \mathbf{yb}$ per qualche coppia di soluzioni ammissibili $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare, esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{array}{ll}
\max x_1 + 2x_2 + x_3 & \\
x_1 + x_3 & \geq 1 \\
x_1 + 2x_2 & \leq 1 \\
x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq 2 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 &
\end{array}$$

z	x_1	x_2	$\mathbf{x_3}$	$\leq$
1	–1	–2	**–1**	0
0	–1	0	**–1**	–1
0	1	2	**0**	1
0	1	1	**3**	2
0	–1	0	**0**	0
0	0	–1	**0**	0
0	0	0	**–1**	0

z	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	$\leq$
3	**–2**	–5	0	2
0	**–2**	1	0	–1
0	**1**	2	0	1
0	**1**	1	0	2
0	**–1**	0	0	0
0	**0**	–1	0	0

z	x_1	x_2	x_3	$\leq$
3	0	**–1**	0	4
0	0	**5**	0	1
0	0	**2**	0	1
3	0	**–3**	0	6
0	0	**3**	0	3
0	0	**1**	0	2
0	0	**–1**	0	0

z	x_1	x_2	x_3	$\leq$
15	0	0	0	21
15	0	0	0	31
0	0	0	0	1
6	0	0	0	9
6	0	0	0	13
0	0	0	0	1
9	0	0	0	15
3	0	0	0	9
0	0	0	0	3
3	0	0	0	6
3	0	0	0	12
0	0	0	0	2

Il valore massimo di z è 7/5. Le variabili assumono i seguenti valori: $x_1 = 3/5$, $x_2 = 1/5$ e $x_3 = 2/5$.

5. Il proiezionista

Con opportune proiezioni ottenute applicando il metodo di Fourier-Motzkin, si determino le disequazioni che individuano l'involucro affine dell'insieme $S = \{(1, 0, 1), (2, 0, 0), (1, 3, 0)\}$.

$$\text{aff}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(2, 0, 0) + \lambda_3(1, 3, 0),\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

Si tratta pertanto di proiettare il sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ x_2 &= 3\lambda_3 \\ x_3 &= \lambda_1 \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

nello spazio delle variabili x_1, x_2, x_3. Il sistema si riscrive

$$\begin{array}{llll} x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 \le 0 & \qquad & -x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \le 0 \\ x_2 - 3\lambda_3 \le 0 & & -x_2 + 3\lambda_3 \le 0 \\ x_3 - \lambda_1 \le 0 & & -x_3 + \lambda_1 \le 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \le 1 & & -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \le -1 \end{array}$$

Applichiamo ora il metodo di Fourier-Motzkin eliminando in successione le variabili λ_1, λ_3, λ_2 (per motivi di spazio le tabelle non contengono le colonne nulle e le righe nulle o ridondanti):

x_1	x_2	x_3	l_1	λ_2	λ_3	$\le$
1	0	0	**–1**	–2	–1	0
0	1	0	**0**	0	–3	0
0	0	1	**–1**	0	0	0
–1	0	0	**1**	2	1	0
0	–1	0	**0**	0	3	0
0	0	–1	**1**	0	0	0
0	0	1	**1**	1	1	1
0	0	–1	**–1**	–1	–1	–1

x_1	x_2	x_3	λ_2	l_3	$\le$
–1	0	1	2	**1**	0
–1	0	0	1	**0**	–1
1	0	–1	–2	**–1**	0
0	0	–1	–1	**–1**	–1
1	0	0	–1	**0**	1
0	0	1	1	**1**	1
0	1	0	0	**–3**	0
0	–1	0	0	**3**	0

x_1	x_2	x_3	l_2	$\le$
–3	1	3	**6**	0
0	1	3	**3**	3
–1	0	0	**1**	–1
0	–1	–3	**–3**	–3
1	0	0	**–1**	1
3	–1	–3	**–6**	0

x_1	x_2	x_3	$\le$
–3	–1	–3	–6
3	1	3	6

Si può quindi concludere che il poliedro è individuato dall'equazione

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$$

6. Esiste un limite?

Siano $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, $P(\mathbf{C}, \mathbf{d})$ due poliedri di $\mathbb{R}^n$. Si formuli come programmazione lineare mista (cioè con variabili sia reali che intere) il problema di stabilire se l'intersezione Q dei due poliedri è contenuta o no in una (iper)scatola con centro nell'origine e lato $2L$.

Suggerimento: si tratta di capire se Q contiene punti $\mathbf{x}$ che hanno una componente x_k con $|x_k| > L$: per ogni componente si introducano allora una variabile binaria u_k e una reale d_k e si costruiscano due vincoli che leghino tra loro le tre variabili.

$$\begin{aligned} \max \quad & d_1 + \ldots + d_n \\ & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{Cx} \le \mathbf{d} \qquad \text{questi vincoli richiedono } \mathbf{x} \in Q \\ & \left.\begin{aligned} d_k &\le x_k + 3L\,u_k \\ d_k &\le -x_k + 3L(1 - u_k) \\ u_k &\in \{0, 1\} \end{aligned}\right\} \qquad k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

L è sufficientemente grande da garantire che, all'ottimo,

$$d_k = \max\{x_k, -x_k\} = |x_k|$$

Infatti se $u_k = 1$ il primo vincolo della graffa pone a d_k una limitazione superiore di $3L + x_k$, e all'ottimo, dovendo massimizzare, si sceglierà $d_k = -x_k \le 3L + x_k$; se viceversa $u_k = 0$ sarà il secondo vincolo a porre come limitazione $3L - x_k$, e in questo caso si sceglierà $d_k = x_k \le 3L - x_k$. Il primo caso converrà se $x_k \le 0$, il secondo se $x_k \ge 0$. Una volta risolto il problema si tratta di vedere se la soluzione ottima contiene o no un $d_k > L$.