RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**
prova scritta del 5 febbraio 2008 **FOGLIO 1**

1. Siano E_3, E_4, E_7 gli insiemi dei multipli rispettivamente di 3, 4 e 7, minori o uguali a 100 e sia $U = E_3 \cup E_4 \cup E_7$. Sia inoltre

$\Im = \{X \subseteq U$: $|X \cap E_3| \le 1$, $|X \cap E_4| \le 1$, $|X \cap E_7| \le 1$ e $\forall a \in X$, $a \in E_i \Rightarrow a \notin E_j$, con $i, j \in \{3, 4, 7\}$ e $i \neq j\}$

la famiglia di tutti i sottoinsiemi X di U che contengono al più un multiplo di 3, al più un multiplo di 4 e al più un multiplo di 7, con in più la condizione che ogni elemento appartiene esclusivamente ad un insieme tra E_3, E_4, E_7. Dire se la coppia $(U,\Im)$:

[A] è un matroide
[B] non è subclusiva
[C] è subclusiva ma non gode della proprietà di scambio

2. Il vettore (2/3, 1/2, 1/3) è combinazione
[A] conica
[B] convessa
[C] affine
dei vettori (2, 1, 0), (–1, 0, 1) e (3, –2, 1/2).

3. Data la coppia di problemi di programmazione lineare (primale/duale):

P) $\max \mathbf{cx}$ D) $\min \mathbf{yb}$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \mathbf{y} \in S \subseteq \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x} \ge 0$$
$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

dove **A** è una matrice con m righe ed n colonne, scrivere in forma compatta il sistema di disequazioni che definisce il poliedro S. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

[A] $\mathbf{cx} \ge \mathbf{yb}$ per ogni coppia di soluzioni ammissibili $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$
[B] $\mathbf{cx} \le \mathbf{yb}$ per ogni coppia di soluzioni ammissibili $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$; $S = \{\mathbf{y} \in R^m$: $\mathbf{yA} \ge \mathbf{c}\}$
[C] $\mathbf{cx} > \mathbf{yb}$ per qualche coppia di soluzioni ammissibili $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare, esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ & x_1 - x_3 \ge 1 \\ & x_1 + 2x_2 \le -1 \\ & x_2 + 3x_3 \le 2 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
1	–1	2	–1	0
0	–1	0	1	–1
0	1	2	0	–1
0	0	1	3	2
0	–1	0	0	0
0	0	–1	0	0
0	0	0	–1	0

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
1	0	2	–1	0
0	0	2	1	–2
0	0	1	3	2
0	0	2	0	–1
0	0	–1	0	0
0	0	0	–1	0

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
1	0	4	0	–2
0	0	2	0	–2
3	0	7	0	2
0	0	1	0	2
0	0	2	0	–1
0	0	–1	0	0

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
1	0	0	0	–2
0	0	0	0	–2
3	0	0	0	2
0	0	0	0	2
0	0	0	0	–1

Dall'ultima tabella è immediato verificare che il sistema iniziale (e quindi il problema) è inammissibile.

5. Il proiezionista

Con opportune proiezioni ottenute con il metodo di Fourier-Motzkin, si determino le disequazioni che individuano l'involucro convesso dell'insieme $S = \{(1, 1), (2, 2), (1, 3), (5, 1)\}$.

$$\text{conv}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) = \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(2, 2) + \lambda_3(1, 3) + \lambda_4(5, 1),\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1,\ \lambda_k \geq 0\}$$

Si tratta pertanto di proiettare il sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 5\lambda_4 \\ x_2 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \end{aligned}$$

nello spazio delle variabili x_1, x_2. Il problema può semplificarsi ricavando ad esempio λ_4 come $1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ e sostituendo. In questo modo si ottiene

$$\begin{aligned} x_1 + 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 5 \\ x_2 - \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &\leq 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Applichiamo ora il metodo di Fourier-Motzkin eliminando in successione le variabili λ_1, λ_3, λ_2 (per motivi di spazio le colonne nulle non sono riportate nelle tabelle):

x_1	x_2	l_1	λ_2	λ_3	$\leq$
1	0	**4**	3	4	5
–1	0	**–4**	–3	–4	–5
0	1	**0**	–1	–2	1
0	–1	**0**	1	2	–1
0	0	**1**	1	1	1
0	0	**–1**	0	0	0
0	0	**0**	–1	0	0
0	0	**0**	0	–1	0

x_1	x_2	λ_2	l_3	$\leq$
1	0	3	**4**	5
–1	0	–3	**–4**	–1
0	1	–1	**–2**	1
0	–1	1	**2**	–1
0	0	–1	**0**	0
0	0	0	**–1**	0

x_1	x_2	l_2	$\leq$
1	2	**1**	7
1	0	**3**	5
0	–1	**1**	–1
–1	0	**1**	–1
0	0	**–1**	0

x_1	x_2	$\leq$
1	2	7
1	0	5
0	–1	–1
–1	0	–1

Si può quindi concludere che il politopo è individuato dalle disequazioni

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_1 &\leq 5 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

6. Il diametro

Si definisce diametro di un insieme S di $\mathbb{R}^n$ la massima distanza $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ che intercorre fra due punti $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ di S. Supponiamo che tale distanza sia definita come la somma dei moduli delle differenze tra le coordinate omologhe di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \ \ldots + |x_n - y_n|$$

Sia $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ un politopo di $\mathbb{R}^n$. Supponendo di sapere che esso è contenuto in una sfera di raggio R, si formuli come programmazione lineare mista (cioè con variabili sia reali che intere) il problema di determinarne il diametro.

Suggerimento: per ogni coppia di componenti x_k, y_k si introducano una variabile binaria u_k e una reale d_k e si costruiscano due vincoli che leghino tra loro le quattro variabili.

$$\begin{aligned} \max \quad & d_1 + \ldots + d_n \\ & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} && \text{questi vincoli richiedono } \mathbf{x} \in P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ & \mathbf{Ay} \leq \mathbf{b} && \text{questi vincoli richiedono } \mathbf{y} \in P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ & \left.\begin{aligned} d_k &\leq x_k - y_k + 2R\,u_k \\ d_k &\leq y_k - x_k + 2R(1 - u_k) \\ u_k &\in \{0, 1\} \end{aligned}\right\} && k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Per ipotesi, R è sufficientemente grande da garantire che, all'ottimo,

$$d_k = \max\{x_k - y_k, y_k - x_k\}$$

In pratica, se $u_k = 1$ il primo vincolo della graffa è sempre soddisfatto e all'ottimo, dovendo massimizzare, si sceglierà $d_k = y_k - x_k$; se viceversa $u_k = 0$ sarà il secondo vincolo a essere sempre soddisfatto, e in questo caso si sceglierà $d_k = x_k - y_k$. Il primo caso converrà se $y_k \geq x_k$, il secondo se $x_k \geq y_k$.