RICERCA OPERATIVA — **GRUPPO A**
prova scritta del 22 gennaio 2008 — **FOGLIO 1**

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).
Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale –1 punto.

1. Sia $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ un insieme finito, e sia a un numero intero positivo. Dato $A \subseteq U$, si consideri la famiglia $\Im$ di tutti i sottoinsiemi X di U tali che $|X \cap A| < a$. Dire se la coppia $(U, \Im)$:
[A] è un matroide: infatti se $Y \in \Im$, allora $|Y \cap A| < a$, quindi per ogni $X \subseteq Y$ anche $|X \cap A| < a$; inoltre siano $X, Y \in \Im$ con $|X| < |Y|$: allora
1) se $y \in Y - A$, $|X \cap A| < a \;\Rightarrow\; |(X \cup \{y\}) \cap A| < a$;
2) se $Y \subseteq A$, allora $|X| < |Y| = |Y \cap A| < a$, e quindi $|(X \cup \{y\}) \cap A| < a$ per ogni $y \in Y$.
[B] gode della proprietà di scambio, ma non è subclusiva
[C] è subclusiva, ma non gode della proprietà di scambio

2. Il vettore (2, 1, 3) è combinazione
[A] affine
[B] convessa
[C] conica
dei vettori (2, 0, 2), (1, 3, 3) e (4, 0, 6).

3. Scrivere il duale del problema:

$$\begin{array}{lrcl}
\min & 4x_1 - x_2 + 3x_3 & & \\
& \frac{1}{2}x_2 - x_3 & \le & 1 \\
& x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 & = & 5 \\
& 4x_1 + 3x_3 & \ge & 3 \\
& x_1, x_2 & \ge & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lrcl}
\max & -y_1 + 5y_2 + 3y_3 & & \\
& y_2 + 4y_3 & \le & 4 \\
& -y_1 + 2y_2 & \le & -2 \\
& 2y_1 - y_2 + 6y_3 & = & 6 \\
& y_1, y_3 & \ge & 0
\end{array}$$

Risolvere il seguente problema. La soluzione viene valutata fino a 4 punti.

4. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare, esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{array}{l}
\max\ x_1 + 3x_2 - x_3 \\
\quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\
\quad x_1 + x_2 \le 1 \\
\quad x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3
\end{array}$$

z	x_1	x_2	$\mathbf{x_3}$	$\le$
1	–1	–3	**1**	0
0	–3	2	**–1**	2
0	1	1	**0**	1
0	–1	0	**0**	0
0	0	–1	**0**	0
0	0	0	**–1**	0

z	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	$\le$
1	**–4**	–1	0	2
0	**1**	1	0	1
0	**–1**	0	0	0
0	**0**	–1	0	0
1	**–1**	–3	0	0

z	x_1	$\mathbf{x_2}$	x_3	$\le$
1	0	**3**	0	6
0	0	**1**	0	1
0	0	**–1**	0	0
1	0	**–2**	0	1

z	x_1	x_2	x_3	$\le$
1	0	0	0	6
5	0	0	0	15
0	0	0	0	1
1	0	0	0	3

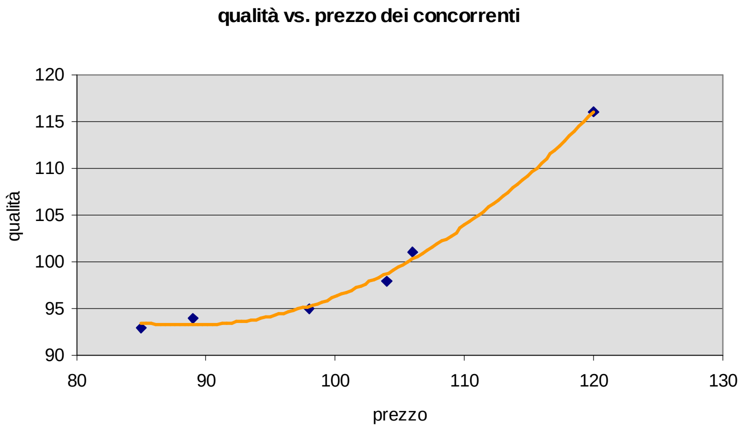
Il valore massimo di z è 3. Le variabili assumono i seguenti valori: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$.

Risolvere i seguenti problemi. La soluzione viene valutata fino a 6 punti.

5. Pubblicità Regresso

Lo sviluppo di un prodotto da lanciare sul mercato prevede una fase preventiva nella quale si analizzano i risultati della concorrenza. Questi risultati sono stati raccolti in una tabella che associa a ogni prodotto (identificato da un numero progressivo) i relativi valori p (prezzo) e q (qualità):

prodotto	1	2	3	4	5	6
p	120	98	85	104	106	89
q	116	95	93	98	101	94



Per posizionare il nuovo prodotto è opportuno calcolare una linea di tendenza, detta anche curva di regressione, del tipo di quella illustrata, la quale dia un'idea del rapporto qualità prezzo ideale del prodotto in questione.

Si formuli come programmazione lineare il problema di determinare i coefficienti a_0, a_1, a_2 di una curva di regressione C della forma $q = a_2p^2 + a_1p + a_0$, posizionandola in modo da minimizzare la distanza complessiva di C dalla nuvola di punti rappresentativa del campione.

Si assuma come distanza del punto (p_k, q_k) dalla curva C il modulo della differenza tra l'ordinata q_k del punto e l'ordinata $a_2p_k^2 + a_1p_k + a_0$ della curva C nell'ascissa p_k.

Le variabili di decisione principali del problema sono i tre coefficienti a_0, a_1, a_2 della parabola cercata C. La distanza da C del punto (p_k, q_k) è data da

$$d_k = |q_k - a_2p_k^2 - a_1p_k - a_0|$$

Il problema consiste nel calcolare

$$\min \quad d_1 + d_2 + \ldots + d_6$$

La definizione dei d_k rende il problema non lineare. È tuttavia possibile trasformarlo in un problema di programmazione lineare introducendo i vincoli

$$\begin{array}{lcl}
d_1 \geq q_1 - a_2p_1^2 - a_1p_1 - a_0 & & d_1 + p_1^2a_2 + p_1a_1 + a_0 \geq q_1 \\
d_1 \geq a_2p_1^2 + a_1p_1 + a_0 - q_1 & & d_1 - p_1^2a_2 - p_1a_1 - a_0 \geq -q_1 \\
\ldots & \text{cioè} & \ldots \\
d_6 \geq q_7 - a_2p_6^2 - a_1p_6 - a_0 & & d_6 + p_6^2a_2 + p_6a_1 + a_0 \geq q_6 \\
d_6 \geq a_7p_6^2 + a_1p_6 + a_0 - q_6 & & d_6 - p_6^2a_2 - p_6a_1 - a_0 \geq -q_6
\end{array}$$

Una soluzione ottima del problema fornisce $a_2 = a_0 = 0$, $a_1 = 1$. La curva di regressione si presenta quindi come la bisettrice $q = p$.

6. La classe non è acqua

Per il marketing di un prodotto è spesso indispensabile classificare l'offerta esistente dividendola in gruppi relativamente omogenei. Considerate il seguente listino:

modello	**peso/potenza** (g/W)	**Prezzo** (k€)
1 *Audi A3*	14,53	40,230
2 *Daewoo Lanos*	13,65	25,792
3 *Ford Focus*	14,55	27,192
4 *Hyundai Lantra*	14,24	28,942
5 *Mercedes A160*	13,87	36,192
6 *Nissan Almera*	18,03	26,242
7 *Peugeot 306*	14,86	29,792
8 *Rover 45*	14,69	32,706
9 *Skoda Octavia*	16,07	26,970
10 *Volkswagen Golf*	15,21	32,730

Formulate come programmazione lineare 0-1 il problema di suddividere l'insieme dei prodotti del listino nel minimo numero possibile di classi in modo da rispettare i seguenti requisiti:

a) ogni coppia di elementi della medesima classe non si domina reciprocamente

b) la differenza di prezzo di due qualsiasi elementi di una medesima classe non supera i 2000€

c) la differenza tra i rapporti peso/potenza di due qualsiasi elementi di una medesima classe non supera i 3 g/W

Suggerimento: utilizzate un opportuno grafo simmetrico.

Costruiamo un grafo $G = (V, E)$ nel quale V è in corrispondenza biunivoca con le vetture del listino, e $uv \in E$ se e solo se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

a) u domina v, oppure v domina u (vale a dire, una delle due vetture ha prezzo e rapporto peso/potenza minore dell'altra)

b) la differenza di prezzo tra le vetture associate a u e v supera i 2000€

c) la differenza tra i rapporti peso/potenza delle vetture associate a u e v supera i 3 g/W

Ad esempio:

$12 \in E$ perché la Daewoo ha prezzo e rapporto peso/potenza migliori dell'Audi, e inoltre la differenza di prezzo tra le due vetture supera i 2000 €;

$56 \in E$ perché nonostante la Mercedes e la Nissan non si dominino reciprocamente, sia i loro prezzi che i loro rapporti peso/potenza differiscono in misura superiore al prescritto;

$69 \notin E$ perché la Nissan e la Skoda non si dominano reciprocamente, il loro prezzo differisce per meno di 2000€ e i loro rapporti peso/potenza differiscono per meno di 3 g/W.

A questo punto il problema considerato consiste nel colorare i nodi del grafo G con il minimo numero di colori. In termini di programmazione lineare 0-1 il problema può formularsi ricorrendo a variabili binarie del tipo:

$x_{ik} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ l'elemento i appartiene alla classe k (ovvero il nodo i ha colore k)

$x_k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ la classe k non è vuota (ovvero il colore k è utilizzato)

La formulazione completa è quindi

$$\min \sum_{k=1}^{10} x_k$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{10} x_{ik} = 1 && \forall\ i \in V \\
&x_{ik} \leq x_k && \forall\ i \in V,\ \forall\ k \\
&x_{ik} + x_{jk} < 1 && \forall\ ij \in E,\ \forall\ k \\
&x_{ik}, x_k \in \{0, 1\} && \forall i \in V,\ \forall\ k
\end{aligned}$$