RICERCA OPERATIVA **GRUPPO B**
prova scritta del 3 luglio 2007

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Se esatta, la risposta vale 2 punti, se sbagliata –1 punto.

1. Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico non vuoto pesato sui vertici tramite una funzione peso π: $V \rightarrow \mathbb{R}$ (con $\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali) e sia C una clique di G con un numero dispari di nodi. Si consideri la famiglia $\mathfrak{I} = \left\{ H \subseteq C \,\middle|\, \sum_{v \in H} \pi(v) > 0 \right\}$. La coppia $(C, \mathfrak{I})$

[A] è subclusiva
[B] è un matroide
[C] gode della proprietà di scambio

Motivare la risposta. La famiglia $\mathfrak{I}$ non è necessariamente subclusiva, in quanto se $\pi(A) > 0$ ma $\pi(u) < 0$ per qualche $u \in A$, allora $\{u\} \notin \mathfrak{I}$. Però vale la proprietà di scambio perché dati A, $B \in \mathfrak{I}$, $|A| < |B|$, chiaramente per ogni $u \in B - A$, $A \cup \{u\}$ è una clique. Inoltre siccome $\pi(B) > 0$, $B - A$ contiene sempre almeno un u tale che $\pi(A \cup \{u\}) > 0$.

2. Il vettore $(^7/_2, 0, {}^1/_2)$ è combinazione

[A] affine
[B] convessa
[C] conica

dei vettori $(-1, 3, 0)$, $(2, 1, {}^1/_3)$ e $(0, -{}^1/_4, {}^3/_2)$.

Risolvere i seguenti problemi. La soluzione viene valutata fino a 3 punti.

3. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di programmazione lineare, esibendo il valore della soluzione ottima (e delle variabili) qualora esista, ovvero classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{array}{lrcl} \max & 2x_1 + x_3 & & \\ & x_1 + 2x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 & \geq & 2 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
–2	0	–1	1	0
1	0	2	0	1
–1	–1	1	0	–2
–1	0	0	0	0
0	–1	0	0	0
0	0	–1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
0	0	3	1	2
0	–1	3	0	–1
0	0	2	0	1
0	–1	0	0	0
0	0	–1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
0	0	0	1	2
0	–1	0	0	–1
0	0	0	0	1
0	–1	0	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
0	0	0	1	2
0	0	0	0	1

Il valore massimo di z è 2. Le variabili assumono i seguenti valori: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$.

4. Dato il seguente problema (P) di programmazione lineare:

$$\begin{array}{llrcl} (P) & \min & 7x_1 + 3x_3 - 5x_4 & & \\ & & x_2 + 10x_3 & = & 0 \\ & & 3x_1 - 7x_4 & \geq & -10 \\ & & 3x_2 + 5x_3 - x_4 & \leq & -3 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

scriverne il duale (D).

Il problema duale è:

$$
\begin{array}{llrcrcl}
(D) & \max & -10y_2 & + & 3y_3 & & \\
 & & 3y_2 & & & \leq & 7 \\
 & y_1 & & - & 3y_3 & \leq & 0 \\
 & 10y_1 & & - & 5y_3 & \leq & 3 \\
 & & -7y_2 & + & y_3 & = & -5 \\
 & & & & y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Risolvere i seguenti problemi. La soluzione viene valutata fino a 6 punti.

5. State buoni se potete

L'ultima volta che Re Artù e sua moglie hanno invitato i dodici cavalieri per fare una bella partita a sette e mezzo è finita in rissa perché molti cavalieri cercavano di sbirciare la carta del vicino, e diverse coppie di cavalieri vicini erano particolarmente litigiose… Interrogati gli astri, Mago Merlino ottiene una mappa cabalistica sotto forma di matrice simmetrica 12×12 dalla quale ricava, per ogni coppia di cavalieri $\{i, j\}$, la probabilità p_{ij} che questi trovino un pretesto per litigare. Re Artù chiede allora a Merlino di disporre i cavalieri intorno alla tavola in modo che la massima probabilità di litigio venga minimizzata. Voi che avete studiato ricerca operativa saprete senza dubbio aiutare il mago a formulare il problema come programmazione lineare 0-1.

Sia C l'insieme dei cavalieri di Re Artù. Stabilito un verso di lettura dei cavalieri intorno al tavolo (ad esempio quello antiorario) definiamo una variabile di decisione $x_{ij} \in \{0, 1\}$ per ogni $(i, j) \in C\times C$ in modo che $x_{ij} = 1$ se e solo se il cavaliere i precede il cavaliere j nell'ordine fissato. Per definizione quindi

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \text{ intero} \qquad \forall ij \in C\times C$$

Ovviamente ogni cavaliere dovrà precedere e seguire un solo altro cavaliere:

$$\sum_{j: ij \in C\times C} x_{ij} = \sum_{j: ji \in C\times C} x_{ji} = 1 \qquad \forall i \in C$$

Inoltre il tavolo è uno solo, e quindi i cavalieri dovranno formare un solo circuito (hamiltoniano): il che vuol dire che per ogni partizione di C in S e T deve aversi

$$\sum_{i\in S, j\in T} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S, T \neq \emptyset : S\cup T = C,\ S\cap T = \emptyset$$

Infine, indichiamo con p la massima probabilità di litigio tra due cavalieri vicini. Chiaramente:

$$p \geq p_{ij}\, x_{ij} \qquad \forall ij \in C\times C$$

e il nostro obiettivo si scrive

$$\min \quad p$$

6. Melting pot

Un kg di componente utilizzato per la realizzazione di una miscela industriale contribuisce mediamente come riportato nella tabella seguente:

	componente 1	componente 2	componente 3	componente 4
A	5	12	10	0
B	2	3	5	6
costo (€/kg)	12	21	23	18

La composizione deve essere realizzata in modo che il prodotto finale contenga almeno 10 unità/kg di A e 7 unità/kg di B. Applicando il metodo del simplesso, dire se è possibile realizzare una miscela che rispetti le specifiche desiderate, e in caso affermativo individuare una composizione di costo minimo.

La composizione ottima della prima miscela è ottenuta risolvendo il problema

$$
\begin{array}{lll}
\min & 12x_1 + 21x_2 + 23x_3 + 18x_4 & \\
& 5x_1 + 12x_2 + 10x_3 & \geq 10 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 & \geq 7 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

dove x_i rappresenta la quantità di componente i presente in un kg di prodotto finale. Per calcolare il costo della miscela ottimale si può risolvere il problema duale:

$$
\begin{array}{lll}
\max & 10y_A + 7y_B + z & \\
& 5y_A + 2y_B + z & \leq 12 \\
& 12y_A + 3y_B + z & \leq 21 \\
& 10y_A + 5y_B + z & \leq 23 \\
& 6y_B + z & \leq 18 \\
& y_A, y_B & \geq 0
\end{array}
$$

Il problema si porta facilmente in forma standard ponendo $z = u - v$ ($u, v \geq 0$) e aggiungendo le variabili di slack:

y_A	y_B	u	v	w_1	w_2	w_3	w_4	
10	7	1	–1	0	0	0	0	0
5	2	1	–1	1	0	0	0	12
12	3	1	–1	0	1	0	0	21
10	5	1	–1	0	0	1	0	23
0	6	1	–1	0	0	0	1	18

Le successive tabelle canoniche sono

y_A	y_B	u	v	w_1	w_2	w_3	w_4	
0	$^9/_2$	$^1/_6$	$-^1/_6$	0	$-^5/_6$	0	0	$-^{35}/_2$
0	$^3/_4$	$^7/_{12}$	$-^7/_{12}$	1	$-^5/_{12}$	0	0	$^{13}/_4$
1	$^1/_4$	$^1/_{12}$	$-^1/_{12}$	0	$^1/_{12}$	0	0	$^7/_4$
0	$^5/_2$	$^1/_6$	$-^1/_6$	0	$-^5/_6$	1	0	$^{11}/_2$
0	6	1	–1	0	0	0	1	18

y_A	y_B	u	v	w_1	w_2	w_3	w_4	
0	0	$-^2/_{15}$	$^2/_{15}$	0	$^2/_3$	$-^9/_5$	0	$-^{137}/_5$
0	0	$^8/_{15}$	$-^8/_{15}$	1	$-^1/_6$	$-^3/_{10}$	0	$^8/_5$
1	0	$^1/_{15}$	$-^1/_{15}$	0	$^1/_6$	$-^1/_{10}$	0	$^6/_5$
0	1	$^1/_{15}$	$-^1/_{15}$	0	$-^1/_3$	$^2/_5$	0	$^{11}/_5$
0	0	$^3/_5$	$-^3/_5$	0	2	$-^{12}/_5$	1	$^{24}/_5$

Nell'ultima tabella la colonna corrispondente alla variabile v ha costo ridotto positivo e tutti gli altri elementi negativi. Di conseguenza il problema duale è illimitato superiormente, e il primale non ammette quindi soluzione.